

서울대학교 면접·구술고사

자연계열 · 물리학

문제 · 예시답안

시험 구분
전형
출제 과목
문항 수
핵심 개념

면접 및 구술고사 (자연계열, 물리학)
수시모집 일반전형
물리 I, 물리 II
2문항 (소문항 8개)
쿨롱 힘의 평형과 단진동 근사, 2차원 힘의 성분 분해,
운동량·역학적 에너지 보존과 용수철 충돌,
물질파(드브로이 파)와 이중 슬릿 간섭, 전기장에 의한 가속,
만유인력과 등속 원운동, 케플러 제3법칙

I. 문제

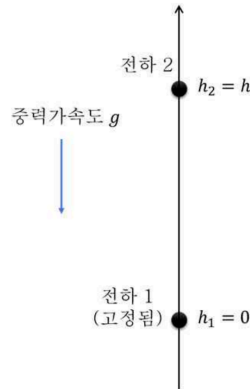
문제 1 전하의 평형 · 단진동 근사 · 용수철 충돌

물리 I · II · 소문항 4개

문제에서 별도로 언급이 없는 경우, 전하 사이의 중력과 상대론적 효과, 양자역학적 효과, 전자기파의 방출, 마찰 등으로 인한 에너지 손실 및 전하의 크기는 무시한다. (g 는 중력가속도, k 는 쿨롱 상수이다.) 풀이에서 필요한 경우, 다음의 수식을 사용할 수 있다. Δr 가 매우 작을 때, 아래 수식으로 근사한다.

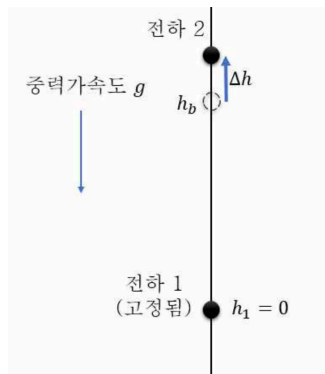
$$(1 + \Delta r)^{-1} \approx 1 - \Delta r, \quad (1 + \Delta r)^{-2} \approx 1 - 2\Delta r.$$

- (1-1) [그림 1]과 같이 전하량 $+q$ 와 질량 m_1 을 가진 전하 1이 $h_1 = 0$ 에 고정되어 있고, 전하량 $+q$ 와 질량 m_2 를 가진 전하 2는 직선 위에서 이동할 수 있다. 직선과 평행하게 아래로 작용하는 균일한 세기의 중력이 존재한다. (a) 중력과 전기력의 크기를 h 에 대한 하나의 그래프로 나타내시오. (b) 전하 2의 평형 위치 h_0 의 값을 구하고, 그래프 위에 표시하시오. (c) 전하 2의 질량을 점차 증가시키면 h_0 의 값이 어떻게 변화하는지 정성적으로 설명하고, 전하 2가 전하 1 아래로 떨어질 수 있는지 설명하시오.



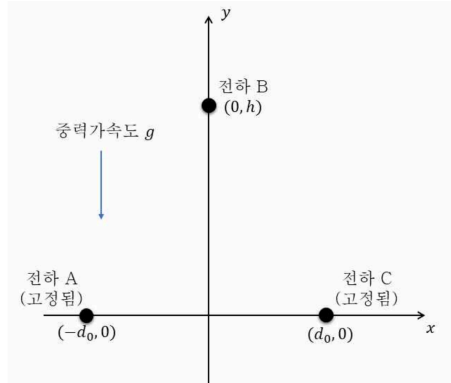
[그림 1] 전하 1($+q, m_1$)은 $h_1 = 0$ 에 고정, 전하 2($+q, m_2$)는 직선 위 높이 h 에서 자유롭게 이동한다.

- (1-2) [그림 2]와 같이 전하 2가 평형 위치 h_b 에서 매우 작은 변위 Δh 만큼 밀려나 있는 경우, 전하 2에 작용하는 알짜힘은 $F \approx -k' \Delta h$ 로 근사적으로 나타낼 수 있고, 이는 가상의 용수철이 가하는 힘으로 생각할 수 있다. (a) k' 을 구하시오. (b) 직선 위의 전하 2를 매우 작은 변위 Δh ($\neq 0$) 만큼 당긴 후 정지한 상태에서 놓았을 때, 전하 2의 운동을 정성적으로 설명하시오. (c) 마찰이 있어서 열에너지가 발생하면, (b)에서 전하 2의 운동이 어떻게 달라지는지 설명하시오. (d) 만약 k' 의 부호와 Δh 의 부호가 같다면, (b)에서 전하 2의 운동이 어떻게 달라지는지 설명하시오. (k' 는 상수이다.)



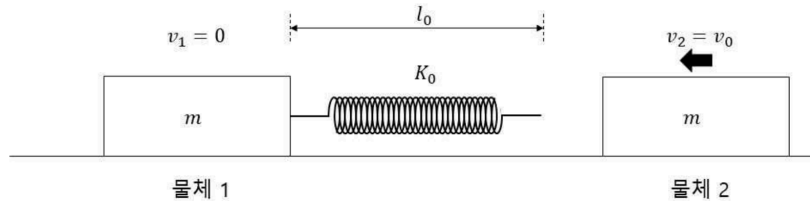
[그림 2] 전하 2가 평형 위치 h_b 에서 변위 Δh 만큼 위로 밀려난 순간. 알짜힘 $F \approx -k' \Delta h$ 가 작용한다.

- (1-3) [그림 3]과 같이, x 축과 y 축으로 이루어진 2차원 평면 위에 같은 질량 m 과 같은 전하량 $+q$ 를 가지는 3개의 전하가 존재하고, $-y$ 방향의 균일한 중력이 작용한다. (x 축으로의 이동은 고려하지 않는다.) 전하 A와 C는 각각 $(x_A, y_A) = (-d_0, 0)$ 과 $(x_C, y_C) = (d_0, 0)$ 의 위치에 움직이지 않고 고정되어 있고(d_0 는 양의 상수), 전하 B는 y 축 위에서 $(x_B, y_B) = (0, h)$ 의 위치로 $h \geq 0$ 에 따라 자유롭게 움직일 수 있다. (a) 전하 B가 전기력과 중력에 의해 가해지는 힘들이 평형을 이루는 평형 위치 $(0, h_b)$ 에 위치해 있다고 하자. 이 평형 위치에서 전하 B에 가해지는 모든 힘들을 전하 B에서 시작하는 벡터로 그려서 나타내고, 이 힘들이 평형을 이루는 이유를 (a)의 벡터를 x, y 축의 성분으로 각각 나누어 그려서 설명하시오. (b) 평형을 이룰 조건을 h_b 에 대한 식으로 나타내시오. (c) 만약 전하 B의 질량을 계속 증가시키면, 결국 전하 B는 어떤 위치에서도 평형을 유지하지 못한다. 그 이유를 설명하시오.

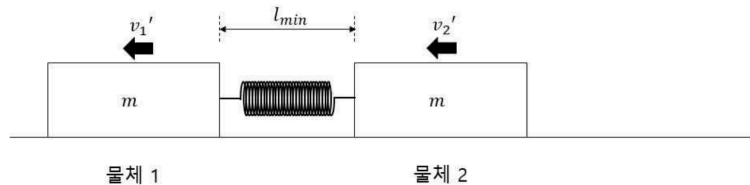


[그림 3] 고정 전하 A($-d_0, 0$)·C($d_0, 0$) 와 y 축 위 높이 h 에서 움직이는 전하 B($0, h$). 세 전하 모두 $+q$, 질량 m 이며 중력은 $-y$ 방향이다.

- (1-4) [그림 4]와 같이 같은 질량 m 을 가진 두 물체 1, 2가 마찰이 없는 수평면 위에 놓여 있고, 물체 1에는 용수철 상수가 K_0 인 용수철이 달려 있다. 용수철의 길이는 힘을 가하지 않았을 때 l_0 이다. 충돌 전 물체 1의 속력은 $v_1 = 0$, 물체 2의 속력은 $v_2 = v_0$ 이고, 서로 가까워지고 있으며 용수철은 힘을 받지 않고 있는 상태이다. 운동량 보존 법칙과 역학적 에너지 보존 법칙을 이용하여 [그림 5]의 충돌 과정에서 용수철이 가장 압축된 순간의 (a) 두 물체의 속력 v_1', v_2' 과 (b) 이때의 용수철 길이 $l_{\min}$ 을 각각 구하시오. (용수철의 질량과 모든 마찰은 무시한다.)



[그림 4] 충돌 전 — 물체 1($v_1 = 0$, 용수철 상수 K_0 , 자연 길이 l_0)과 물체 2($v_2 = v_0$)가 서로 가까워진다.



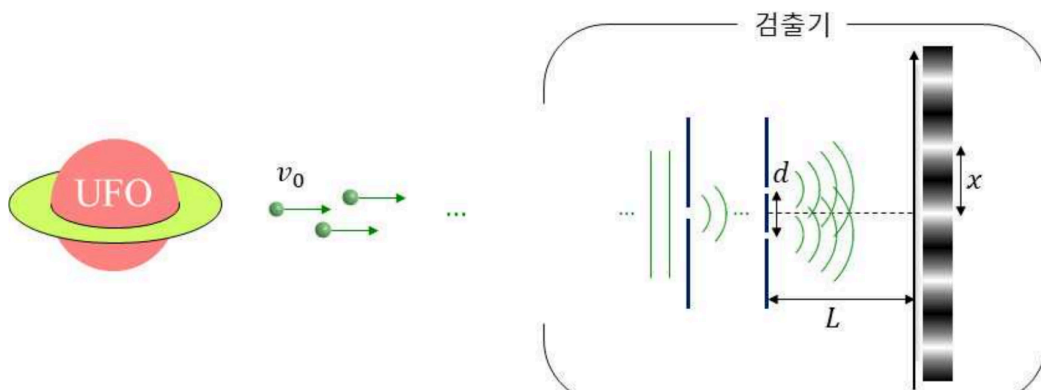
[그림 5] 가장 압축된 순간 — 두 물체가 같은 속력으로 움직이며 용수철 길이는 $l_{\min}$ 이다.

문제 2 물질파 간섭 · 전기장 가속 · 지구 궤도

물리 I · II · 소문항 4개

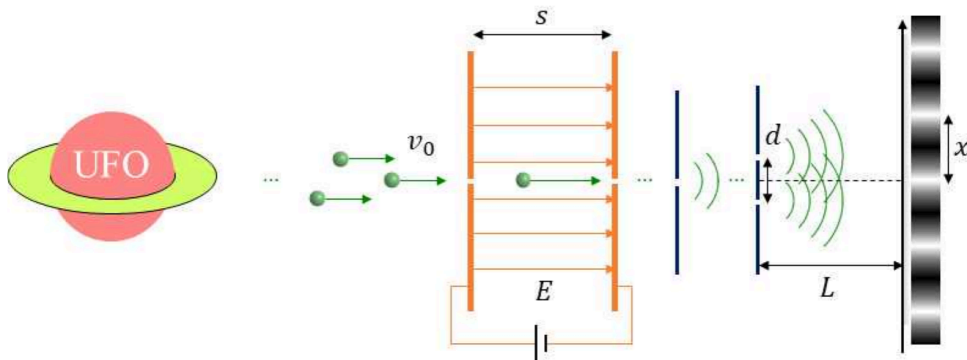
UFO(미확인 비행물체)가 정지해 있고, 질량이 m 인 미지의 입자 X 를 일정한 속력 v_0 로 지속적으로 방출하고 있다. 실험을 통해 X 의 성질을 확인하고자 한다. (UFO와 입자의 크기, 상대론적 효과, 전자기파 방사에 의한 영향은 모두 무시한다.)

- (2-1) UFO 근처에 검출기가 고정되어 있다. 검출기는 [그림 6]과 같이 이중 슬릿과 스크린으로 구성되어 있고, X 는 이중 슬릿에 수직하게 입사한다. 슬릿 사이의 간격은 d 이고, 이중 슬릿과 스크린 사이의 간격은 L 이다. (L 은 d 보다 굉장히 크다.) 입자의 파동성을 고려하였을 때 X 가 이중 슬릿을 통과한 후 전자기파와 같은 간섭무늬를 스크린에 나타낸다. 스크린 상에서 보강간섭이 일어나는 두 이웃한 지점 간의 간격을 x 라고 할 때, x 를 v_0 로 나타내시오. (플랑크 상수는 h 이고, 중력에 의한 영향은 무시한다.)



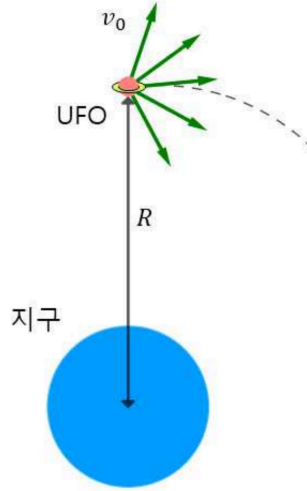
[그림 6] 정지한 UFO가 속력 v_0 로 입자 X 를 방출 → 간격 d 의 이중 슬릿 → 거리 L 의 스크린. 물질파 간섭무늬가 간격 x 로 나타난다.

- (2-2) [문제 2-1]과 같은 상황에서, 검출기 앞에 작은 구멍이 뚫린 평행판 축전기를 설치하여 X 를 통과시킨 후 검출기에 입사시키고자 한다. ([그림 7] 참고) 평행판 사이의 간격은 s 이고, 평행판 사이에는 균일한 세기 E 의 전기장이 X 의 이동 방향과 같은 방향으로 걸려 있다. X 의 전하량이 Q (> 0) 일 때, [문제 2-1]의 x 가 어떻게 변하는지 계산하시오. (중력에 의한 영향은 무시한다.)



[그림 7] 방출된 X 가 간격 s · 전기장 세기 E 인 평행판 축전기를 통과하며 가속된 뒤 이중 슬릿·스크린에 도달한다.

- (2-3) 이번에는 UFO가 지구에서 멀리 떨어진 곳에 정지해 있다. UFO가 입자 X 를 속력 v_0 로 어떤 방향으로 방출한 후 지구 중력만 받으며 지구 주위를 등속 원운동 하기 위한 조건으로, (a) 지구 중심으로부터 UFO까지의 거리 R 을 v_0 로 나타내시오. (b) 입자가 방출되는 방향을 제시하시오. 중력 상수는 G , 지구의 질량은 M_E 로 나타내시오. (X 의 입자성만을 고려하고, 지구의 중력 외에 다른 힘은 모두 무시한다.)



[그림 8] UFO가 지구 중심으로부터 거리 R 에서 입자 X 를 속력 v_0 로 방출한다(점선은 궤적). 지구는 완전한 구로 가정한다.

- (2-4) 이제 UFO에서 입자 X 를 방출하는 방향은 [문제 2-3(b)]에서와 같으나 속력이 다른 경우를 생각한다. UFO에서 방출된 입자 X 하나가 지구에 충돌하거나 통과하지 않고 UFO로 다시 돌아오는 데 걸리는 최소 시간을 구하시오. 지구 중심으로부터 UFO까지의 거리는 R , 중력 상수는 G , 지구의 반지름은 R_E , 지구의 질량은 M_E 로 나타내시오. (지구는 완벽한 구 모양임을 가정하고, 지구 중력 외에 다른 힘은 모두 무시한다.)

II. 예시답안

문제 1 전하의 평형 · 단진동 근사 · 용수철 충돌

쿨롱 힘의 평형 · 테일러 근사 · 보존 법칙

- (1-1) $h_0 = q\sqrt{k/(m_2g)}$, m_2 가 커지면 h_0 는 작아지지만 결코 0 이 되지 않는다

위쪽을 + 로 잡는다. 높이 h 에 있는 전하 2가 받는 힘은 두 가지뿐이다.

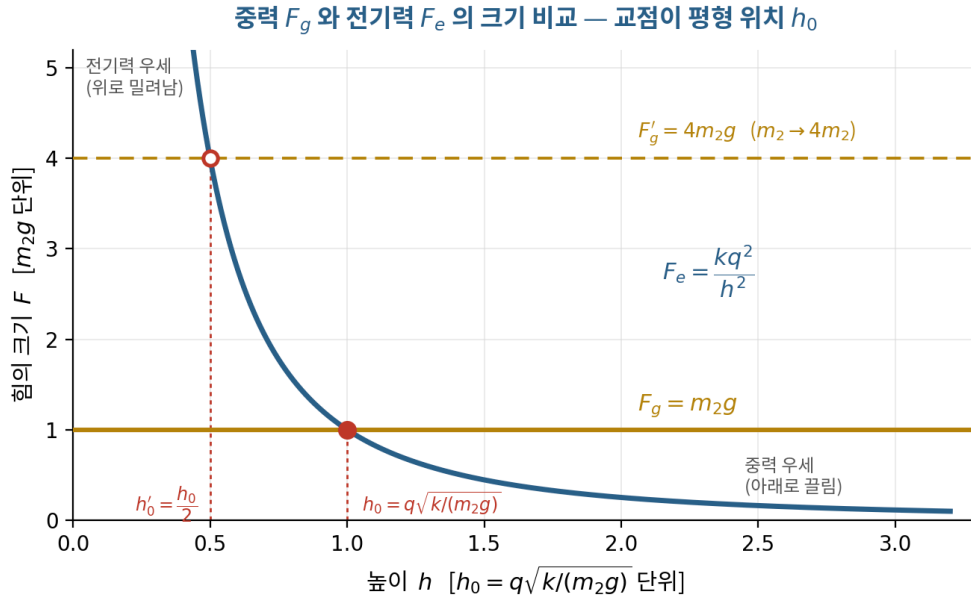
- 중력: 아래 방향, 크기 $F_g = m_2g$ (h 에 무관한 상수).
- 전하 1이 주는 쿨롱 힘: 두 전하가 모두 $+q$ 로 같은 부호이므로 척력, 즉 위 방향이고 크기는

$$F_e(h) = \frac{kq^2}{h^2}.$$

- (a) F_g 는 가로축(h)에 평행한 수평 직선이고, $F_e(h) = kq^2/h^2$ 는

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F_e = \infty, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} F_e = 0, \quad \frac{dF_e}{dh} = -\frac{2kq^2}{h^3} < 0$$

이므로 $h > 0$ 전 구간에서 단조 감소하는 곡선이다. 즉 h 가 0^+ 에서 ∞ 로 갈 때 F_e 는 ∞ 에서 0 까지 단조감소하며 구간 $(0, \infty)$ 전체를 빠짐없이 훑는다. 따라서 임의의 양수 상수 $F_g = m_2g$ 와 정확히 한 번 만난다(교점의 존재성과 유일성).



[답안 도해 1] 중력 $F_g = m_2g$ (직선)와 전기력 $F_e = kq^2/h^2$ (곡선). 교점의 가로좌표가 평형 위치 h_0 이며, 질량이 $m_2 \rightarrow 4m_2$ 로 커지면 직선이 4배 높이로 올라가 교점이 왼쪽($h_0' = h_0/2$)으로 이동한다.

(b) 평형 조건은 알짜힘 = 0, 즉 두 힘의 크기가 같다는 것이다.

$$\frac{kq^2}{h_0^2} = m_2g \Rightarrow h_0^2 = \frac{kq^2}{m_2g}$$

$$h_0 = q\sqrt{\frac{k}{m_2g}}$$

그래프에서는 곡선 F_e 와 직선 F_g 의 **교점의 가로좌표**가 h_0 이다([답안 도해 1]의 붉은 점). 이 평형은 **안정 평형**이다. $h < h_0$ 이면 $F_e > F_g$ 이므로 알짜힘이 위로, $h > h_0$ 이면 $F_e < F_g$ 이므로 알짜힘이 아래로 작용하여 언제나 h_0 쪽으로 되돌리기 때문이다.

(c) $h_0 = q\sqrt{k/(m_2g)} \propto m_2^{-1/2}$ 이므로 질량이 커지면 h_0 는 **작아진다**. 예를 들어 m_2 를 4배로 하면 h_0 는 1/2 배가 된다. [답안 도해 1]에서 수평 직선 F_g 가 위로 올라가면 교점이 왼쪽으로 옮겨 가는 것과 같다.

그러나 아무리 무겁게 해도 $h_0 > 0$ 이고, $m_2 \rightarrow \infty$ 에서 $h_0 \rightarrow 0^+$ 로 다가갈 뿐 0 이 되지는 않는다. 전하 2가 전하 1 아래로 내려가려면 $h = 0$ 을 지나야 하는데, 그 근처에서 전기력이 $F_e = kq^2/h^2 \rightarrow \infty$ 로 발산하여 유한한 중력 m_2g 를 반드시 이긴다. 퍼텐셜 에너지로 보아도

$$U(h) = \frac{kq^2}{h} + m_2gh, \quad U(0^+) = \infty$$

이므로 $h = 0$ 은 넘을 수 없는 무한히 높은 에너지 장벽이다.

질량을 아무리 키워도 $h_0 > 0$ 이므로 전하 2는 전하 1 아래로 **떨어질 수 없다**.

(1-2) $k' = \frac{2kq^2}{h_b^3} = \frac{2m_2g}{h_b} > 0$, 주기 $T = 2\pi\sqrt{h_b/(2g)}$ 의 단진동

(a) 위쪽을 +로 하여 높이 h 에서의 알짜힘을 쓰면 $F(h) = kq^2/h^2 - m_2g$ 이고, 평형 위치 h_b 에서는 $F(h_b) = 0$, 즉 $kq^2/h_b^2 = m_2g$ 이다. 이제 $h = h_b + \Delta h$ 를 대입하고 $\Delta h/h_b$ 가 매우 작음을 이용한다.

$$F = \frac{kq^2}{(h_b + \Delta h)^2} - m_2g = \frac{kq^2}{h_b^2} \left(1 + \frac{\Delta h}{h_b}\right)^{-2} - m_2g$$

제시된 근사 $(1 + \Delta r)^{-2} \approx 1 - 2\Delta r$ 를 $\Delta r = \Delta h/h_b$ 에 적용하면

$$F \approx \frac{kq^2}{h_b^2} \left(1 - 2\frac{\Delta h}{h_b}\right) - m_2g = \underbrace{\left(\frac{kq^2}{h_b^2} - m_2g\right)}_{=0} - \frac{2kq^2}{h_b^3} \Delta h = -\frac{2kq^2}{h_b^3} \Delta h$$

이다. 이를 $F \approx -k' \Delta h$ 와 비교하고, 평형 조건 $kq^2/h_b^2 = m_2g$ 를 다시 써서 $kq^2/h_b^3 = m_2g/h_b$ 로 바꾸면

$$k' = \frac{2kq^2}{h_b^3} = \frac{2m_2g}{h_b} > 0$$

($h_b = q\sqrt{k/(m_2g)}$) 를 대입하면 $k' = 2(m_2g)^{3/2}/(q\sqrt{k})$ 로도 쓸 수 있다.)

(b) $k' > 0$ 이므로 알짜힘 $F = -k' \Delta h$ 는 언제나 변위와 **반대 방향**을 향하는 복원력이다. 뉴턴 운동 제2법칙은

$$m_2 \frac{d^2(\Delta h)}{dt^2} = -k' \Delta h \Rightarrow \frac{d^2(\Delta h)}{dt^2} = -\omega^2 \Delta h, \quad \omega = \sqrt{\frac{k'}{m_2}} = \sqrt{\frac{2m_2g}{h_b m_2}} = \sqrt{\frac{2g}{h_b}}$$

가 되어 **단진동(단순조화운동)**의 운동 방정식과 같은 꼴이다. 정지 상태에서 Δh 만큼 당긴 후 놓았으므로 초기 조건은 $\Delta h(0) = \Delta h$, $d(\Delta h)/dt = 0$ 이고, 해는 $\Delta h(t) = \Delta h \cos \omega t$, 속력의 최댓값은 $v_{\max} = \omega |\Delta h| = |\Delta h| \sqrt{2g/h_b}$ 이다. 즉 전하 2는 평형 위치 h_b 를 중심으로 진폭 $|\Delta h|$ 로 대칭인 왕복 운동을 되풀이하며, 그 주기는

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k'}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_2 h_b}{2m_2 g}} = 2\pi \sqrt{\frac{h_b}{2g}}$$

주기는 진폭 $|\Delta h|$ 에 무관하다(등시성). 또 평형 높이 h_b 를 고정해 보면 주기는 h_b 와 g 만으로 결정된다. 다만 h_b 자체가 m_2 에 의존하므로($h_b = q\sqrt{k/(m_2g)} \propto m_2^{-1/2}$), 실제로는 $T \propto m_2^{-1/4}$ 로 질량이 커질수록 주기가 짧아진다.

(c) 마찰이 있으면 매 순간 운동 방향과 반대로 작용하는 마찰력이 음(-)의 일을 하여 역학적 에너지 $E = \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}k'(\Delta h)^2$ 가 열에너지로 계속 빠져나간다. 따라서 왕복은 계속하되 진폭이 조금씩 줄어드는 **감쇠 진동**이 된다.

속력에 비례하는 저항력 $f = -bv$ 가 작용하는 **점성 감쇠**로 보면, 감쇠가 약한 경우($b^2 < 4m_2k'$) 해는 $\Delta h(t) = \Delta h e^{-bt/(2m_2)} \cos \omega' t$ 꼴이어서 진폭이 지수적으로 줄어들고 전하 2는 평형 위치 h_b 로 수렴한다. 최종적으로 운동 에너지도 탄성 에너지도 0 이 되므로, 열로 바뀐 총 에너지는 처음 저장되어 있던

$$\frac{1}{2}k'(\Delta h)^2 = \frac{m_2g(\Delta h)^2}{h_b}$$

와 같다. (진동수 $\omega' = \sqrt{\omega^2 - b^2/(4m_2^2)}$ 로 약간 줄지만, 감쇠가 약하면 거의 변하지 않는다.) 반면 크기가 일정한 건마찰이라면 정지 위치가 h_b 에서 조금 벗어난 곳이 될 수 있으므로 총 발열은 $\approx \frac{1}{2}k'(\Delta h)^2$ 로 보아야 한다.

(d) 문항을 문자 그대로 읽으면 ($k' > 0$, $\Delta h > 0$) 인 경우도 포함되는데, 그때 알짜힘은 $F = -k' \Delta h < 0$ 으로 여전히 변위와 반대인 복원력이어서 (b)의 단진동과 달라지는 것이 없다. 따라서 출제 취지상 **알짜힘이 변위와 같은 방향인 경우**, 즉 $F \cdot \Delta h > 0$ 이 되어 유효 용수철 상수가 음수($k' < 0$)인 상황으로 해석한다. 이때 운동 방정식은

$$m_2 \frac{d^2(\Delta h)}{dt^2} = |k'| \Delta h \Rightarrow \Delta h(t) = \Delta h \cosh(\lambda t), \quad \lambda = \sqrt{\frac{|k'|}{m_2}}$$

로 부호가 뒤집혀, 삼각함수 대신 지수적으로 커지는 해를 준다. 즉 전하 2는 진동하지 않고 처음 당긴 쪽으로 **계속 가속되며 멀어진다**. 평형점이 퍼텐셜 에너지의 극소가 아니라 극대인 셈이므로 **불안정 평형**이다.

- 위로 당겼다면($\Delta h > 0$) 당긴 쪽인 위로 계속 멀어진다.
- 아래로 당겼다면($\Delta h < 0$) 당긴 쪽인 아래로 계속 멀어진다.
- 어느 쪽이든 **당긴 쪽으로 계속 멀어지며**, 결코 h_b 로 되돌아오지 않는다.

(1-3) $\frac{2kq^2h_b}{(d_0^2 + h_b^2)^{3/2}} = mg$, $mg > \frac{4\sqrt{3}kq^2}{9} \frac{1}{d_0^2}$ 이면 평형 위치가 존재하지 않는다

(a) 전하 B(0, h_b) 가 받는 힘은 세 개이다. 먼저 A에서 B로 향하는 변위 벡터와 그 크기는

$$\vec{r}_{AB} = (0, h_b) - (-d_0, 0) = (d_0, h_b), \quad r = |\vec{r}_{AB}| = \sqrt{d_0^2 + h_b^2}$$

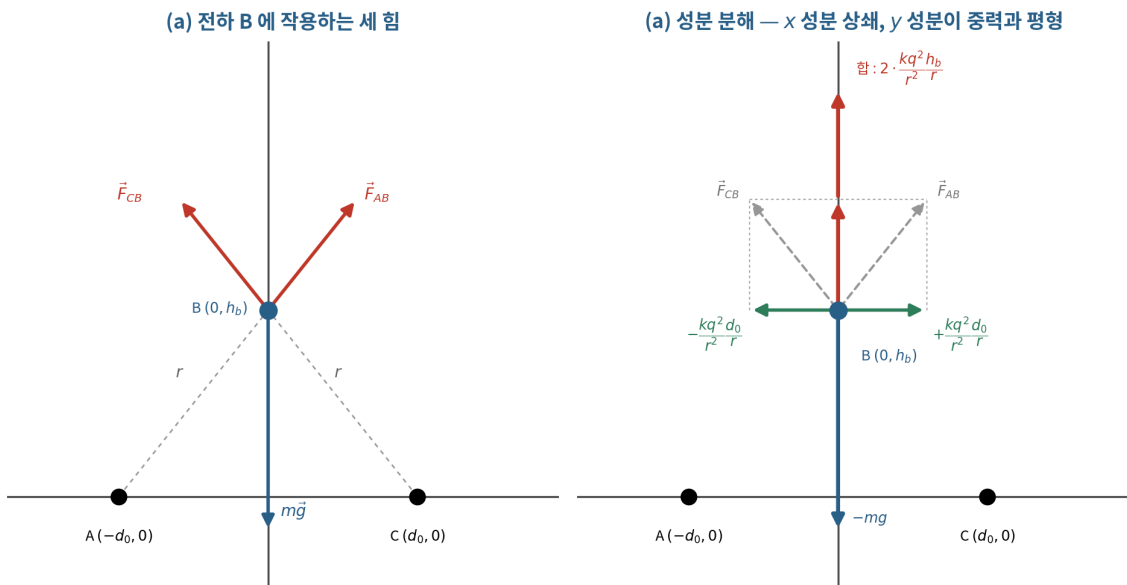
이고, C에서 B로 향하는 것은 $\vec{r}_{CB} = (-d_0, h_b)$ 로 크기가 같다. 같은 부호의 전하이므로 척력이고 크기는 둘 다 kq^2/r^2 이다. 방향 단위벡터를 곱하면

$$\vec{F}_{AB} = \frac{kq^2}{r^2} \cdot \frac{d_0, h_b}{r} = \frac{kq^2}{r^3} (d_0, h_b), \quad \vec{F}_{CB} = \frac{kq^2}{r^3} (-d_0, h_b)$$

이고, 중력은 $\vec{F}_g = (0, -mg)$ 이다. 두 척력을 성분별로 더하면

$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CB} = \left(\frac{kq^2}{r^3} (d_0 - d_0), \frac{kq^2}{r^3} (h_b + h_b) \right) = \left(0, \frac{2kq^2h_b}{r^3} \right)$$

로 x 성분은 정확히 상쇄되고 y 성분만 두 배로 남는다. A와 C가 y 축에 대해 대칭으로 놓여 있기 때문이다. 결국 알짜 위 방향 전기력은 $F_{up}(h_b) = 2kq^2h_b/(d_0^2 + h_b^2)^{3/2}$ 이고, 이것이 아래 방향 중력 mg 와 크기가 같아 세 힘이 평형을 이룬다.



[답안 도해 2] (왼쪽) 전하 B에서 시작하는 세 힘 벡터 $\vec{F}_{AB}$ (오른쪽 위), $\vec{F}_{CB}$ (왼쪽 위), $m\vec{g}$ (아래). (오른쪽) 같은 벡터를 $x \cdot y$ 성분으로 분해한 그림 - 회색 점선이 분해 전의 $\vec{F}_{AB}$, $\vec{F}_{CB}$ 이다. 두 척력의 x 성분(초록)은 크기가 같고 방향이 반대라 상쇄되며, y 성분(붉은색) 둘을 머리-꼬리로 이으면 합 $2(kq^2/r^2)(h_b/r)$ 이 되어 중력 mg 와 균형을 이룬다. 여기서 $r = \sqrt{d_0^2 + h_b^2}$.

(b) (a)의 y 성분 균형식을 그대로 쓰면 평형 조건은 다음과 같다.

$$\frac{2kq^2h_b}{(d_0^2 + h_b^2)^{3/2}} = mg \quad \text{또는} \quad 2kq^2h_b = mg(d_0^2 + h_b^2)^{3/2}$$

(c) 1-1과 달리 이번에는 $h \rightarrow 0$ 에서 위 방향 전기력이 발산하지 않는다. B가 x 축에 가까워지면 두 척력이 거의 수평이 되어 서로 상쇄되어 버리기 때문이다. 실제로

$$F_{up}(h) = \frac{2kq^2h}{(d_0^2 + h^2)^{3/2}}, \quad F_{up}(0) = 0, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} F_{up}(h) = 0$$

이므로 F_{up} 은 유한한 최대값을 가진다. 미분하면

$$\frac{dF_{up}}{dh} = 2kq^2 \cdot \frac{(d_0^2 + h^2)^{3/2} - h \cdot 3h(d_0^2 + h^2)^{1/2}}{(d_0^2 + h^2)^3} = \frac{2kq^2(d_0^2 - 2h^2)}{(d_0^2 + h^2)^{5/2}}$$

이고, 이것이 0 이 되는 곳은 $h = d_0/\sqrt{2}$ 이다.

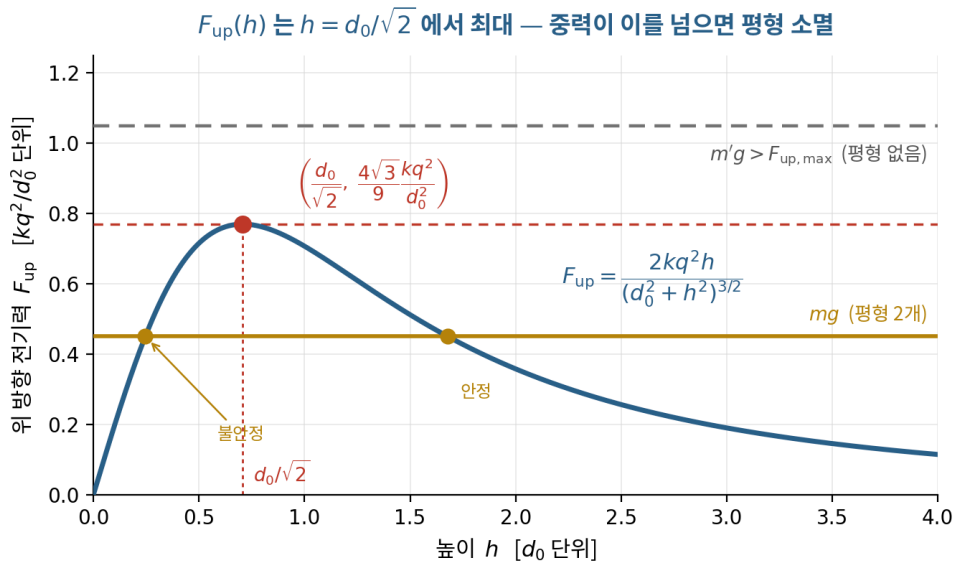
그 값을 대입하면

$$F_{\text{up}, \text{max}} = \frac{2kq^2 \cdot d_0/\sqrt{2}}{(3d_0^2/2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}kq^2 d_0}{d_0^3 \cdot 3\sqrt{3}/(2\sqrt{2})} = \frac{4kq^2}{3\sqrt{3}d_0^2} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{kq^2}{d_0^2} \approx 0.77 \frac{kq^2}{d_0^2}$$

이다. 따라서 평형이 존재하려면 $mg \leq F_{\text{up}, \text{max}}$ 여야 한다. 질량을 계속 키워 다음 조건을 넘어서면, 어떤 $h \geq 0$ 에서도 $F_{\text{up}}(h) = mg$ 를 만족할 수 없어 평형 위치가 사라진다.

$$m > m_c = \frac{4\sqrt{3} kq^2}{9 g d_0^2}$$

이때는 모든 $h > 0$ 에서 알짜힘이 아래를 향하므로 전하 B는 어떤 높이에서도 붙들려 있지 못하고 x 축($h = 0$)까지 내려간다. $h = 0$ 에서는 두 척력이 완전히 수평이 되어 $F_{\text{up}}(0) = 0$ 이므로, 문항이 정한 영역 $h \geq 0$ 안에서는 그 지점이 종착점이다.



[답안 도해 3] $F_{\text{up}}(h)$ 는 $h = d_0/\sqrt{2}$ 에서 최댓값 $4\sqrt{3}kq^2/(9d_0^2)$ 를 가진다. mg 가 이보다 작으면 평형점이 두 개(작은 쪽은 불안정, 큰 쪽은 안정) 생기고, 최댓값을 넘어서면 교점이 사라져 평형이 존재하지 않는다.

(1-4) $v'_1 = v'_2 = \frac{v_0}{2}$, $l_{\text{min}} = l_0 - v_0 \sqrt{\frac{m}{2K_0}}$

(a) 물체 2가 처음 움직이는 방향(물체 1을 향하는 방향)을 +로 잡는다. 수평면에 마찰이 없고 두 물체와 용수철로 이루어진 계에 수평 방향 외력이 없으므로 **운동량이 보존**된다.

용수철의 길이는 두 물체의 상대 위치로 정해지므로, 길이의 변화율은 두 물체의 상대 속도와 같다. 따라서 용수철이 **가장 압축된 순간**에는 길이의 변화율이 0, 즉

$$v'_2 - v'_1 = 0 \Rightarrow v'_1 = v'_2 \equiv v'$$

로 두 물체의 속도가 같아진다. 운동량 보존식을 세우면 $mv_1 + mv_2 = m \cdot 0 + mv_0 = (m+m)v'$ 이므로

$$v'_1 = v'_2 = v' = \frac{v_0}{2} \quad (\text{두 물체 모두 물체 2의 처음 진행 방향으로})$$

- (b) 마찰이 없고 용수철도 이상적이므로 **역학적 에너지가 보존된다**. 압축량을 $x = l_0 - l_{\min}$ 이라 하면, (처음 운동 에너지) = (가장 압축된 순간의 운동 에너지) + (용수철 탄성 퍼텐셜 에너지) 이므로

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}K_0x^2$$

이다. 우변 첫 항은 $\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_0^2/4 = \frac{1}{4}mv_0^2$ 이므로

$$\frac{1}{2}K_0x^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{4}mv_0^2 = \frac{1}{4}mv_0^2 \Rightarrow x^2 = \frac{mv_0^2}{2K_0}, \quad x = v_0\sqrt{\frac{m}{2K_0}}$$

$$l_{\min} = l_0 - x = l_0 - v_0\sqrt{\frac{m}{2K_0}}$$

에너지 분배 — 처음 운동 에너지 $\frac{1}{2}mv_0^2$ 중 정확히 절반인 $\frac{1}{4}mv_0^2$ 만 용수철에 저장되고 나머지 절반은 계 전체의 병진 운동 에너지로 남는다. 같은 결과를 질량 중심 좌표계에서도 얻을 수 있다. 환산질량 $\mu = m \cdot m/(m+m) = m/2$, 상대 속력 v_0 이므로 저장 가능한 최대 탄성 에너지는

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 = \frac{1}{2}K_0x^2 \Rightarrow x = v_0\sqrt{\frac{\mu}{K_0}} = v_0\sqrt{\frac{m}{2K_0}}$$

로 위와 같다. (물론 이 답은 $x < l_0$, 즉 용수철이 완전히 눌러 붙지 않는 범위에서 성립한다.)

문제 2 물질파 간섭 · 전기장 가속 · 지구 궤도

드브로이 파장 · 일-운동 에너지 정리 · 케플러 법칙

$$(2-1) x = \frac{hL}{mdv_0}$$

입자 X 의 운동량은 $p = mv_0$ 이므로, 드브로이 관계에 의해 물질파의 파장은

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv_0}$$

이다. 이 물질파가 간격 d 인 두 슬릿을 지나면, 두 슬릿에서 스크린 위의 한 점까지의 **경로차** 는 $L \gg d$ 일 때 $\delta = d \sin \theta$ 로 쓸 수 있다. 보강간섭 조건은 경로차가 파장의 정수배인 것이므로

$$d \sin \theta_n = n\lambda \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

이다. 스크린 중심에서 전 위치를 x_n 이라 하면 $L \gg d$ 에서 각이 매우 작으므로

$$\sin \theta_n \approx \tan \theta_n = \frac{x_n}{L} \Rightarrow x_n = \frac{n\lambda L}{d}$$

이고, 이웃한 두 보강간섭 지점 사이의 간격은 $x = x_{n+1} - x_n = \lambda L/d$ 이다. 여기에 $\lambda = h/(mv_0)$ 를 대입하면

$$x = \frac{L\lambda}{d} = \frac{hL}{mdv_0}$$

무늬 간격은 속력에 반비례한다($x \propto 1/v_0$). 입자가 빠를수록 운동량이 커져 물질파 파장이 짧아지고, 간섭무늬는 그만큼 촘촘해진다.

$$(2-2) x' = \frac{hL}{d\sqrt{m(mv_0^2 + 2QEs)}} < x \text{ — 무늬 간격이 줄어든다(무늬가 촘촘해진다)}$$

전기장 E 가 X 의 이동 방향과 같은 방향이고 $Q > 0$ 이므로, 전기력 QE 도 이동 방향과 같아 X 는 평행판 사이를 지나 는 동안 **가속**된다. 판 사이 거리 s 를 지나는 동안 전기력이 한 일은

$$W = QEs \quad (= QV, \quad V = Es \text{ 는 두 판 사이의 전위차})$$

이다. 일-운동 에너지 정리를 적용하면 통과 후 속력 v' 은

$$\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = QEs \Rightarrow v' = \sqrt{v_0^2 + \frac{2QEs}{m}} > v_0$$

이다. 따라서 새 물질파 파장과 무늬 간격은

$$\lambda' = \frac{h}{mv'} < \lambda, \quad x' = \frac{L\lambda'}{d} = \frac{hL}{mdv'} = \frac{hL}{d\sqrt{m^2v_0^2 + 2mQEs}}$$

$$x' = \frac{hL}{d\sqrt{m(mv_0^2 + 2QEs)}}, \quad \frac{x'}{x} = \frac{v_0}{v'} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2QEs}{mv_0^2}}} < 1$$

즉 무늬 간격은 x 에서 x' 로 줄어들어 간섭무늬가 더 촘촘해진다. 극한을 보면

- $QEs \ll \frac{1}{2}mv_0^2$ (약한 가속): $x' \approx x \left(1 - \frac{QEs}{mv_0^2}\right)$ 로 거의 변하지 않는다.
- $QEs \gg \frac{1}{2}mv_0^2$ (강한 가속): $x' \approx hL/(d\sqrt{2mQEs})$ 로, 처음 속력과 무관하게 $x' \propto 1/\sqrt{QEs}$ 로 작아진다.

(2-3) $R = \frac{GM_E}{v_0^2}$, 방출 방향: UFO와 지구 중심을 잇는 직선에 수직(접선 방향)

- (a) 방출된 입자 X 가 지구 중심을 중심으로 하는 반지름 R 의 등속 원운동을 하려면, 유일하게 작용하는 힘인 만유인력이 그대로 **구심력** 이 되어야 한다.

$$\frac{GM_E m}{R^2} = \frac{mv_0^2}{R}$$

양변에서 입자의 질량 m 이 약분되고 R 에 대해 정리하면

$$\frac{GM_E}{R^2} = \frac{v_0^2}{R} \Rightarrow R = \frac{GM_E}{v_0^2}$$

입자의 질량 m 이 사라졌으므로 이 조건은 X 가 무엇이든 상관없이 성립한다. 이때 주기는 $T = 2\pi R/v_0 = 2\pi GM_E/v_0^3$ 이다.

- (b) 등속 원운동에서는 속력이 일정하므로(운동 에너지가 변하지 않으므로) 알짜힘이 한 일이 0, 즉 매 순간 일률이 $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ 이어야 하고, 따라서 알짜힘(만유인력, 즉 지구 중심 방향)은 언제나 속도와 **수직**이다. 방출 순간에도 마찬가지로 속도는 반지름 방향에 수직, 즉

UFO와 지구 중심을 잇는 직선(반지름 R)에 **수직인 방향**(궤도의 접선 방향)으로 속력 $v_0 = \sqrt{GM_E/R}$ 로 방출해야 한다.

반지름에 수직인 방향은 무수히 많으며, 그중 어느 방향을 고르느냐에 따라 궤도면이 정해진다. 만약 반지름 방향 속도 성분이 조금이라도 있으면 지구 중심과의 거리가 변하므로 원운동이 될 수 없다.

(2-4) $T_{\min} = \pi \sqrt{\frac{(R + R_E)^3}{2GM_E}}$

방출 방향이 반지름에 수직이므로 방출 순간 반지름 방향 속도 성분이 0 이다. 즉 방출점에서 지구 중심까지의 거리 r 이 극값을 가지므로, 방출점은 궤도의 **장축 끝점(원지점 또는 근지점)** 이다. 입자가 UFO로 되돌아오려면 궤도가 닫혀 있어야 하므로 타원 궤도이고, 방출점이 장축 끝점이므로 한 바퀴를 돌아 정확히 **한 주기** T 만에 제자리로 돌아온다. 케플러 제3법칙에서

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_E}} \quad (a : \text{긴반지름})$$

이므로 T 를 최소로 하려면 a 를 최소로 해야 한다. 방출점이 장축의 한쪽 끝이므로, 지구 중심에서 방출점까지의 거리 R 과 지구 중심에서 장축의 반대쪽 끝까지의 거리를 더한 값이 장축 $2a$ 이고, 두 경우로 나뉜다.

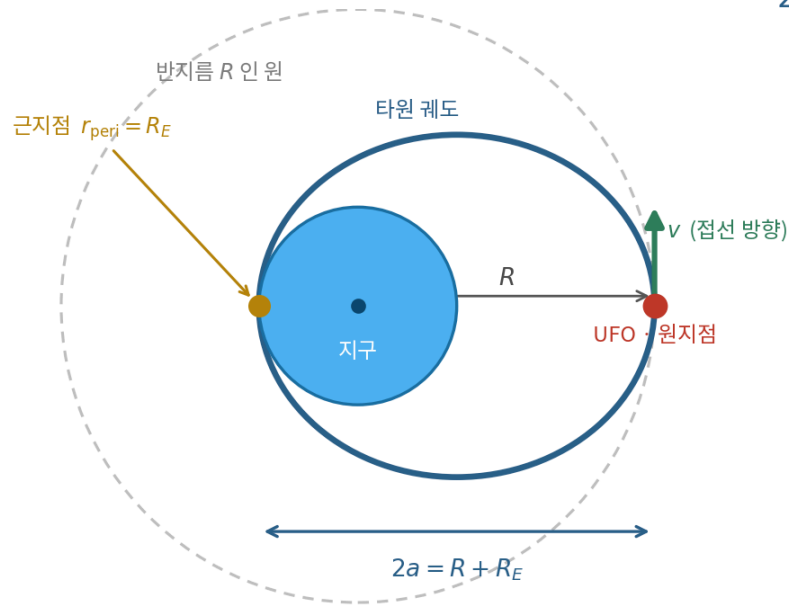
- 방출 속력이 원운동 속력보다 **빠른** 경우: 방출점이 **근지점** 이 되어 $2a = R + r_{\text{apo}} > 2R$.
- 방출 속력이 원운동 속력보다 **느린** 경우: 방출점이 **원지점** 이 되어 $2a = R + r_{\text{peri}} < 2R$.

따라서 느리게 쏘아 방출점을 원지점으로 만들고, 근지점 r_{peri} 를 될 수 있는 한 작게 잡아야 한다. 그런데 입자가 지구에 충돌하거나 통과해서는 안 되므로 $r_{\text{peri}} \geq R_E$ 이고, 최소는 지표를 스치는 $r_{\text{peri}} = R_E$ 이다. 이때 $2a = R + R_E$, 즉 $a = (R + R_E)/2$ 이므로

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{((R + R_E)/2)^3}{GM_E}} = \frac{2\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(R + R_E)^3}{GM_E}}$$

$$T_{\min} = \pi \sqrt{\frac{(R + R_E)^3}{2GM_E}}$$

주기가 최소인 궤도 : 원지점 R · 근지점 R_E 인 타원 $\Rightarrow a = \frac{R + R_E}{2}$



[답안 도해 4] 주기가 최소가 되는 궤도 — 방출점(UFO)이 원지점, 지표를 스치는 점이 근지점인 타원. 긴반지름은 $a = (R + R_E)/2$ 이다.

이때 필요한 방출 속력 — 원지점 속력 v_a , 근지점 속력 v_p 라 하면 각운동량 보존(케플러 제2법칙)과 역학적 에너지 보존에서

$$Rv_a = R_E v_p, \quad \frac{1}{2}v_a^2 - \frac{GM_E}{R} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM_E}{R_E}$$

이고, 첫 식을 둘째 식에 대입해 정리하면

$$\frac{1}{2}v_a^2 \left(\frac{R^2}{R_E^2} - 1 \right) = GM_E \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R} \right) = \frac{GM_E(R - R_E)}{RR_E} \Rightarrow v_a = \sqrt{\frac{2GM_E R_E}{R(R + R_E)}}$$

를 얻는다. $R_E < R$ 이므로 $v_a^2 / (GM_E/R) = 2R_E / (R + R_E) < 1$, 즉 이 속력은 원운동 속력보다 느리다 — 앞의 논의와 일치한다.

극한 확인 — $R_E \rightarrow R$ 이면 궤도가 반지름 R 의 원에 가까워지고

$$T_{\min} \rightarrow \pi \sqrt{\frac{(2R)^3}{2GM_E}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_E}}$$

로 반지름 R 인 원 궤도의 주기와 정확히 일치한다.