

서울대학교 면접·구술고사

자연계열 · 물리학

문제 · 예시답안

시험 구분
전형
문항 수
핵심 개념

면접 및 구술고사 (자연계열, 물리학)

수시모집 일반전형

2문항 (소문항 11개)

이중 슬릿 간섭과 매질의 굴절률, 광로차와 보강 조건,
평면 스크린에서의 무늬 간격, 도플러 효과와 단진동,
광전 효과와 문턱 진동수, 차원에 따른 힘의 법칙,
로그 퍼텐셜과 보어 모형, 케플러 제3법칙, 전기력선

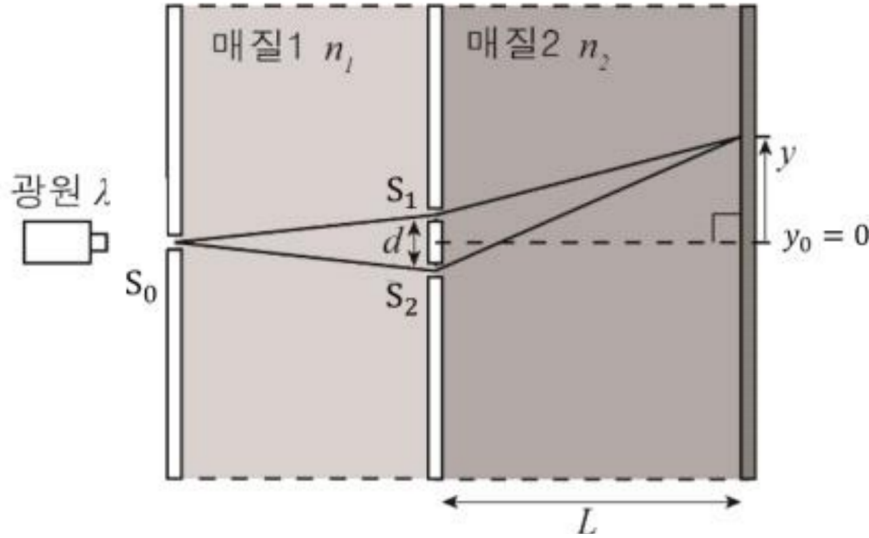
I. 문제

문제 1 이중 슬릿 간섭 — 매질의 굴절률, 도플러 효과, 광전 효과

소문항 5개

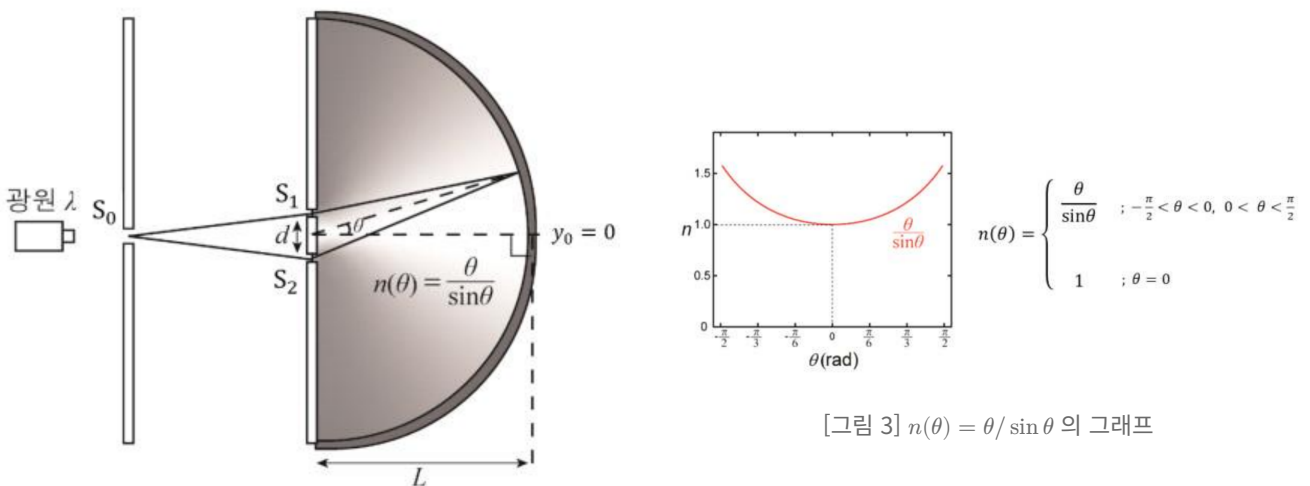
슬릿 사이의 거리가 d 인 이중 슬릿에서 L 만큼 떨어진 곳에 스크린이 있다. (단, L 이 d 보다 충분히 크다고 가정하고 각 슬릿의 폭은 무시한다. 스크린 중앙은 $y_0 = 0$ 이며, θ 는 스크린 중앙을 기준으로 한다.)

- (1-1) [그림 1]과 같이 진공에서 파장 λ 인 빛을 방출하는 광원을 단일 슬릿 S_0 과 이중 슬릿 S_1, S_2 앞에 놓았더니 스크린에 간섭무늬가 나타났다. 단일 슬릿 S_0 과 이중 슬릿 S_1, S_2 사이의 굴절률이 n_1 인, 이중 슬릿 S_1, S_2 와 스크린 사이의 굴절률이 n_2 인 매질로 채워져 있다. (단, $n_1 < n_2$.) 스크린에 나타나는 인접한 보강 간섭 무늬 사이의 거리 Δy 와 인접한 상쇄 간섭 무늬 사이의 거리 $\Delta y'$ 를 문제에 제시된 문자로 나타내시오.



[그림 1] 매질 1(굴절률 n_1)과 매질 2(굴절률 n_2)로 채워진 이중 슬릿 장치

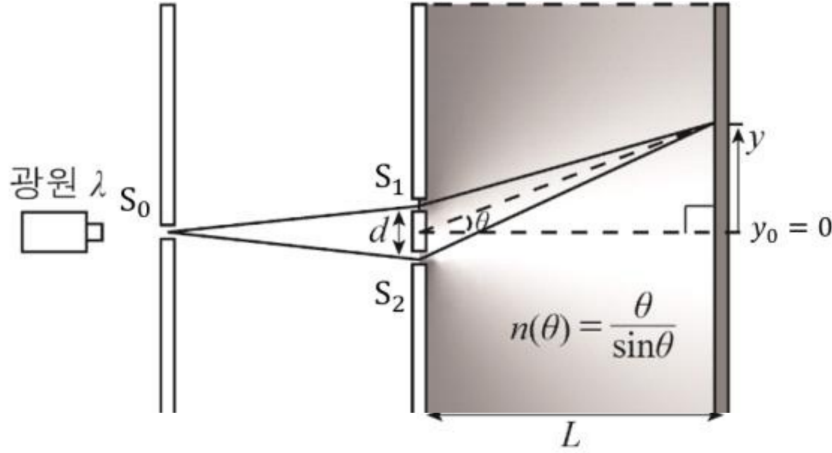
- (1-2) [그림 2]와 같이 θ 에 따라 변하는 굴절률 $n(\theta)$ 를 지닌 가상의 매질이 있다. 광원에서 나온 파장이 λ 인 빛이 단일 슬릿 S_0 과 이중 슬릿 S_1, S_2 를 지나 가상의 매질을 통과한 후 반원 형태의 스크린에 도달한다. θ 에 따른 $n(\theta)$ 의 그래프와 함수는 [그림 3]과 같다. 스크린에 나타나는 밝은 무늬 패턴의 개수를 모두 구하시오. (단, $\lambda = (\pi/20)d$ 이고, $\theta = \pm\pi/2$ 에서의 무늬는 무시한다.)



[그림 3] $n(\theta) = \theta / \sin \theta$ 의 그래프

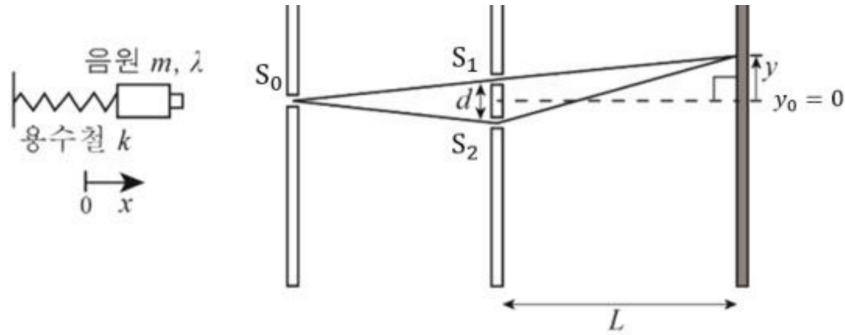
[그림 2] 반원 스크린과 각도에 따라 변하는 굴절률 $n(\theta)$

- (1-3) [문제 1-2]에서 [그림 2]의 반원 형태 스크린을 [그림 4]와 같이 평면 스크린으로 바꾸었다. 인접한 밝은 무늬의 중심 사이 거리를 $\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$ 이라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $\lambda = (\pi/20)d$ 이고, y_n 은 스크린 중앙으로부터 n 번째 밝은 무늬의 중심이다. n 은 1 이상의 정수이다.)
- (1) Δy_2 를 문제에 제시된 문자로 나타내시오.
 - (2) 인접한 밝은 무늬의 중심 사이의 거리 Δy_n 은 스크린의 중앙에서 멀어질수록 어떻게 변하는지 설명하시오.



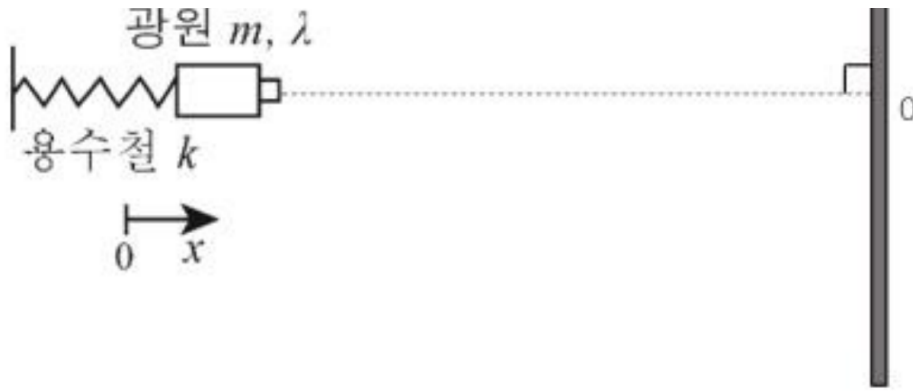
[그림 4] 반원 스크린을 평면 스크린으로 바꾼 경우

- (1-4) [그림 5]와 같이 정지한 공기 중에서 파장 λ 인 음파를 발생시키는 음원이 용수철 상수가 k 인 용수철에 매달려 있다. 음원의 질량은 m 이며, 주기 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, 진폭 A 로 단진동을 하고 있으며 시간 t 에 따른 x 좌표는 $x(t) = A \sin(\sqrt{k/m} \cdot t)$ 이다. 스크린 위에서 소리가 크게 들리는 인접한 극대점 사이의 거리를 Δy 라고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 중력과 공기저항에 의한 효과는 무시하며, 음속은 V 로 일정하다. 소리가 스크린에 도달하기까지 걸리는 시간 t_0 는 T 에 비해 훨씬 작아 무시할 수 있다고 가정한다.)
- (1) 음원의 속도를 t 에 대한 함수로 나타내시오.
 - (2) Δy 를 t 에 대한 함수로 나타내시오.
 - (3) Δy 가 단진동의 한 주기 내에서 어떻게 변하는지 설명하시오.



[그림 5] 용수철에 매달려 단진동하는 음원과 이중 슬릿·스크린

- (1-5) [그림 6]과 같이 진공에서 파장이 λ 인 광원의 빛이 금속 스크린에 입사한다. 이때 질량 m 인 광원은 용수철 상수 k 인 용수철에 매달려 주기 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, 진폭 A 로 단진동을 하고 있다. 이 광원의 시간 t 에 따른 x 좌표는 $x(t) = A \sin(\sqrt{k/m} \cdot t)$ 이며 $A\sqrt{k/m} = \frac{1}{2\sqrt{2}}c$ 이다. 광원과 금속 스크린 사이에서 금속 스크린으로부터 튀어나온 광자가 아닌 입자를 검출한다고 할 때, $t = 0$ 에서 입자가 검출되다가 $t = T/8$ 부터 검출되지 않았다. (단, 중력에 대한 효과는 무시하며, c 는 진공에서의 빛의 속도이다. 입자는 모두 금속 표면으로부터 튀어나온다고 가정한다. 광원의 최대 속도는 광속보다 충분히 작다고 가정한다. 빛은 속도가 c 인 음파처럼 다룰 수 있다.)
- (1) 검출되는 입자는 무엇인지 말하고, 입자가 검출되다가 검출되지 않는 이유를 설명하시오.
 - (2) 입자가 $t = T/8$ 부터 검출되지 않다가 어느 순간 입자가 다시 검출되기 시작한다고 할 때, 그 시간을 구하시오. (단, $0 \leq t \leq T$)
 - (3) 검출되는 입자의 최대 운동 에너지를 구하시오.



[그림 6] 단진동하는 광원과 금속 스크린

문제 2 n 차원 우주의 중력과 전기력 — 궤도·보어 모형·화학 결합

소문항 6개

우리가 살고 있는 3차원 공간의 우주 U 에는 2가지 중요한 힘이 있는데 중력과 전기력이다. 뉴턴의 중력 법칙에 따르면, 질량이 각각 M, m 인 두 물체가 거리 r 만큼 떨어져 있을 때, 두 물체 사이에 작용하는 중력의 크기는 아래와 같다.

$$F_{\text{중력}} = G \frac{Mm}{r^2} \quad (G \text{ 는 3차원 중력 상수})$$

또한, 쿨롱 법칙에 따르면, 전하량이 각각 q_1, q_2 인 두 점전하가 거리 r 만큼 떨어져 있을 때, 두 점전하 사이에 작용하는 전기력의 크기는 아래와 같다.

$$F_{\text{전기력}} = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad (k \text{ 는 3차원 쿨롱 상수})$$

가상의 2차원 공간 우주 U' 에서는 뉴턴의 중력 법칙과 쿨롱 법칙이 각각 아래와 같이 변한다고 가정한다.

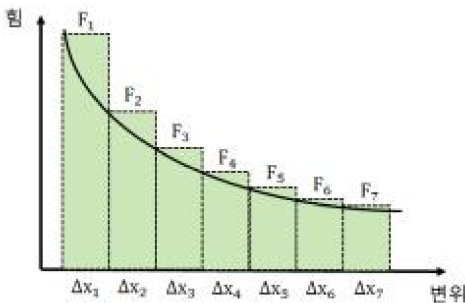
$$F'_{\text{중력}} = G' \frac{Mm}{r} \quad (G' \text{ 은 2차원 중력 상수}), \quad F'_{\text{전기력}} = k' \frac{|q_1 q_2|}{r} \quad (k' \text{ 은 2차원 쿨롱 상수})$$

우주 U' 에서 플랑크 상수 h , 양성자와 전자의 전하량 $\pm q_e$, 전자의 질량 m_e , 광속 c 는 우주 U 에서와 같다고 가정한다.

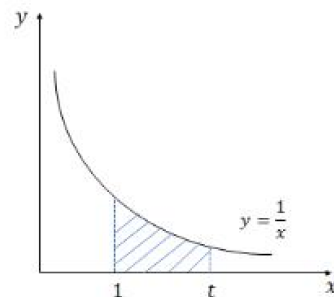
토막글 : 퍼텐셜 에너지 함수와 힘이 일정하지 않을 때의 일

중력, 전기력과 크기는 같고 방향이 반대인 힘이 r_0 부터 r 까지 해 준 일을 구하면, 위치 r 에서의 중력, 전기력에 의한 퍼텐셜 에너지 함수를 구할 수 있다. 이때 r_0 에서의 퍼텐셜 에너지를 0으로 잡는다.

힘이 해 준 일의 크기는 힘-변위 그래프 아래의 기하학적인 면적에 해당한다. 따라서 힘의 크기가 일정하지 않더라도 [그림 1]처럼 작은 사각형들로 나눈 후에 나뉘진 사각형들의 넓이의 합인 그래프 아래의 면적을 구해 힘이 해 준 일의 크기를 구할 수 있다. 또한, 그래프 아래의 면적을 구할 때 정적분을 활용할 수 있다.



[그림 1] 힘-변위 그래프 아래의 넓이(정적분) 근사



[그림 2] $y = 1/x$ 그래프 아래의 넓이 $= \ln t$

토막글 : $y = 1/x$ 함수 그래프 아래의 면적

[그림 2]에서 함수 $y = 1/x$ 와 $x = 1, x = t, x$ 축으로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = \log_e t = \ln t$$

로 주어진다. $\log_e t$ 의 밑 e 는 어떤 무리수 (2.718...) 이다.

- (2-1) 우주 U 에서 같은 질량 m 을 갖는 행성 1과 행성 2가 질량 M 인 항성을 중심으로 각각 반지름 R 과 $10R$ 인 등속 원운동을 하고 있다고 하자. (단, M 은 m 에 비해 매우 크고, 행성 1과 행성 2 사이의 중력은 무시한다.)
- (1) 행성 1과 행성 2의 운동 에너지의 차이를 구하시오.
 - (2) 행성 1과 행성 2의 중력 퍼텐셜 에너지의 차이를 구하시오.
- 우주 U' 에서 같은 상황을 가정하였을 때,
- (3) 행성 1과 행성 2의 운동 에너지의 차이를 구하시오.
 - (4) 행성 1과 행성 2의 중력 퍼텐셜 에너지의 차이를 구하시오.
- (2-2) 우주 U' 에서는 케플러 제3법칙이 어떻게 변할지 설명하시오. (단, 행성의 운동은 원운동으로 가정한다.)
- (2-3) 우주 U 의 수소 원자에서 양자수 n 인 전자의 반지름 r_n 은 $r_n = a_0 n^2$ 이고, 에너지 E_n 은 $E_n = -|E_1|/n^2$ 인 관계를 만족한다. (단, a_0 는 보어 반지름)
- (1) 우주 U' 에서 우주 U 에서와 같은 보어 양자가설을 적용할 수 있을 때, 우주 U' 의 가상 수소 원자에서 양자수 n 인 전자의 반지름 r'_n 과 에너지 E'_n 를 구하시오. (단, 중력에 의한 효과는 무시한다.)
 - (2) 우주 U' 에서 전자가 양자수 n_2 상태에서 n_1 상태로 전이할 때 방출되는 빛의 파장을 구하시오. (단, $n_2 > n_1$)
- (2-4) [문제 2-3 (1)]의 결과를 참조하여 다음 질문에 답하시오.
- (1) 우주 U' 에서 가상 수소 원자의 바닥 상태($n = 1$)에 있던 전자가 수소 원자로부터 완전히 벗어나는 데 필요한 에너지를 구하시오.
 - (2) 수소 원자가 다른 원자와 결합하는 관점에서 우주 U' 과 우주 U 가 어떤 차이가 있을지 설명하시오.
- (2-5) [문제 2-3]과 [문제 2-4]에서 확인했듯이 3차원 공간 우주 U 와 2차원 공간 우주 U' 는 미시 세계에서 아주 다른 결과를 만들어내는데, 이 근본적인 원인을 퍼텐셜 에너지 함수의 개형을 기반으로 설명하시오.
- (2-6) 제시문에서 3차원 공간 우주 U 와 달리 2차원 공간 우주 U' 에서는 전기력의 크기가 거리에 반비례함을 제시하였다. 정전하에서 전기력선의 분포를 고려하여 이를 설명하시오.

II. 예시답안

문제 1 이중 슬릿 간섭 — 매질의 굴절률, 도플러 효과, 광전 효과 매질 속 파장 · 광로차 · 도플러 효과 · 광전 효과

$$(1-1) \Delta y = \Delta y' = \frac{\lambda L}{n_2 d}$$

빛이 매질로 들어가도 진동수 f 는 변하지 않고 속력만 c/n 으로 줄어든다. 따라서 굴절률 n_2 인 매질 2 속에서의 파장은

$$\lambda_2 = \frac{c/n_2}{f} = \frac{\lambda}{n_2}$$

이다. 한편 S_0 는 $S_1 S_2$ 의 수직이등분선 위에 있으므로 매질 1을 지나는 두 경로 $S_0 S_1$ 과 $S_0 S_2$ 의 길이가 같고, 매질 1에서 생기는 광로차는 0 이다. 즉 n_1 은 무늬 간격에 전혀 영향을 주지 않는다.

스크린 위의 좌표 y 인 점을 향하는 두 광선의 경로차는 $L \gg d$ 이므로

$$\Delta = d \sin \theta \approx d \tan \theta = \frac{d \cdot y}{L}$$

이고, 매질 2 속의 파장 λ_2 를 기준으로 보강·상쇄 조건은 각각

$$\frac{d \cdot y}{L} = m \lambda_2 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \frac{d \cdot y}{L} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_2$$

이다. 이를 y 에 대해 풀면 보강 무늬는 $y_m = m \lambda_2 L / d$, 상쇄 무늬는 $y_m = (m + 1/2) \lambda_2 L / d$ 로 둘 다 이웃한 두 값의 차이가 $\lambda_2 L / d$ 이다.

$$\Delta y = \Delta y' = \frac{\lambda_2 L}{d} = \frac{\lambda L}{n_2 d}$$

보강 무늬 간격과 상쇄 무늬 간격은 서로 같으며(상쇄 무늬는 보강 무늬의 정중앙에 놓인다), 굴절률 n_2 가 클수록 매질 속 파장이 짧아져 무늬가 더 촘촘해진다.

(1-2) 밝은 무늬 패턴은 모두 19개

반원 스크린의 반지름 L 이 d 보다 충분히 크므로, 중심각 θ 방향으로 나아가는 두 광선은 평행하다고 볼 수 있고 기하학적 경로차는 $d \sin \theta$ 이다. 매질의 굴절률이 $n(\theta)$ 이므로 실제 간섭을 결정하는 것은 광학적 경로차(광로차)

$$\Delta_{\text{광학}} = n(\theta) \cdot d \sin \theta$$

이다. 여기에 $n(\theta) = \theta / \sin \theta$ 를 대입하면 $\sin \theta$ 가 약분되어

$$\Delta_{\text{광학}} = \frac{\theta}{\sin \theta} \cdot d \sin \theta = \theta d$$

로, 광로차가 각 θ 에 정비례한다. ($\theta = 0$ 에서도 $n(0) = 1$, $\Delta_{\text{광학}} = 0$ 으로 연속이다.) 보강 간섭 조건 $\Delta_{\text{광학}} = m \lambda$ 에 $\lambda = (\pi/20)d$ 를 넣으면

$$\theta d = m \left(\frac{\pi}{20}\right) d \Rightarrow \theta_m = m \frac{\pi}{20} \quad (m \text{ 은 정수})$$

즉 밝은 무늬가 각도에 대해 $\pi/20$ 씩 등간격으로 나타난다. 스크린은 반원이므로 정의역은 $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ 이고 $\theta = \pm \pi/2$ 의 무늬는 무시하라고 하였으므로

$$\left|m \frac{\pi}{20}\right| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |m| < 10 \Rightarrow m = -9, -8, \dots, -1, 0, 1, \dots, 8, 9$$

가능한 m 은 -9 부터 9 까지의 정수이므로 밝은 무늬 패턴의 개수 = 19 개

$n(\theta) = \theta / \sin \theta$ 라는 굴절률이 경로차의 $\sin \theta$ 라는 비선형성을 정확히 상쇄해 주기 때문에, 진공 속 이중 슬릿에서는 중앙에서 멀어질수록 각 간격이 벌어지던 무늬가 이 매질에서는 완전한 등각 간격이 된다.

(1-3) (1) $\Delta y_2 = L(\tan(\pi/10) - \tan(\pi/20)) = \frac{L \sin(\pi/20)}{\cos(\pi/10) \cos(\pi/20)} \approx 0.167L$ (2) 중앙에서 멀어질수록 넓어진다

스크린을 평면으로 바꾸어도 매질과 슬릿은 그대로이므로 밝은 무늬가 생기는 방향은 (1-2)와 같은 $\theta_n = n\pi/20$ 이다. 슬릿에서 θ_n 방향으로 나아간 빛은 거리 L 떨어진 평면 스크린 위의

$$y_n = L \tan \theta_n = L \tan \left(n \frac{\pi}{20} \right)$$

에 도달한다. 따라서 이웃한 두 밝은 무늬 중심 사이의 거리는

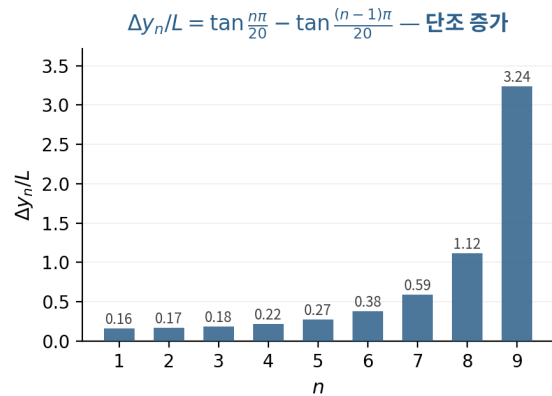
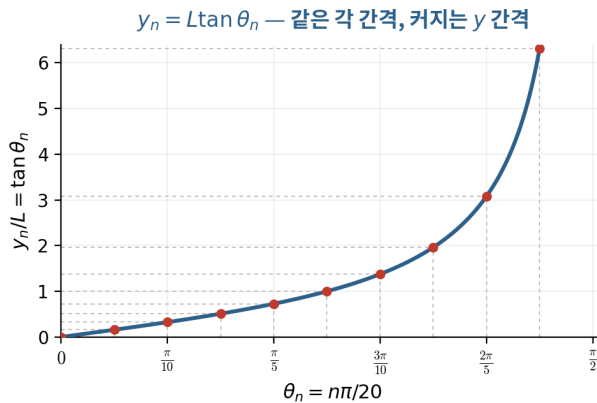
$$\Delta y_n = y_n - y_{n-1} = L \left[\tan \frac{n\pi}{20} - \tan \frac{(n-1)\pi}{20} \right] = L \frac{\sin(\pi/20)}{\cos \frac{n\pi}{20} \cdot \cos \frac{(n-1)\pi}{20}}$$

이다 ($\tan \alpha - \tan \beta = \sin(\alpha - \beta) / (\cos \alpha \cos \beta)$ 를 이용). y_n 이 유한하려면 $\theta_n < \pi/2$ 이어야 하므로 정의역은 $n = 1, 2, \dots, 9$ 이다. (1) 은 $n = 2$ 인 경우이므로 $\theta_2 = \pi/10, \theta_1 = \pi/20$ 을 대입하면

$$\Delta y_2 = y_2 - y_1 = L \left(\tan \frac{\pi}{10} - \tan \frac{\pi}{20} \right) = \frac{L \sin(\pi/20)}{\cos(\pi/10) \cos(\pi/20)} \approx 0.167L$$

(2) 변화 경향 — 위의 정리된 형태에서 분자 $L \sin(\pi/20)$ 은 n 과 무관한 상수이고, 분모의 $\cos(n\pi/20) \cdot \cos((n-1)\pi/20)$ 은 n 이 커질수록 (두 각이 모두 $\pi/2$ 에 가까워지므로) 단조 감소한다. 따라서

- Δy_n 은 n 이 커질수록 단조 증가한다. 즉 스크린 중앙에서 멀어질수록 무늬 간격이 넓어진다.
- 원인은 스크린이 평면이라는 점에 있다. 무늬의 각 간격은 $\pi/20$ 으로 일정하지만, 평면 위 좌표는 $y = L \tan \theta$ 로 각에 대해 위로 볼록하게 증가하므로 같은 각 간격이 바깥쪽에서 훨씬 큰 길이 간격으로 환산된다.
- $n \rightarrow 10$ ($\theta \rightarrow \pi/2$) 에서는 $\cos(n\pi/20) \rightarrow 0$ 이므로 $\Delta y_n \rightarrow \infty$ 로 발산한다. 즉 무늬는 스크린 바깥으로 무한히 퍼져 나간다.



예시 작도 — 등각 간격 $\theta_n = n\pi/20$ 이 평면 스크린 위에서 점점 넓어지는 Δy_n 으로 환산되는 모습

(1-4) (1) $v_s(t) = A\sqrt{k/m} \cos(\sqrt{k/m}t)$ (2) $\Delta y(t) = \frac{\lambda L}{d} \left[1 - \frac{A}{V} \sqrt{k/m} \cos(\sqrt{k/m}t) \right]$

(1) 음원의 속도 — 각진동수를 $\omega = \sqrt{k/m} = 2\pi/T$ 라 하면 $x(t) = A \sin(\omega t)$ 이므로

$$v_s(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t) = A\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

이다. $v_s > 0$ 은 음원이 $+x$ 방향, 즉 슬릿·스크린 쪽으로 다가감을 뜻한다.

(1-4) 계속 — 도플러 효과와 무늬 간격

음원이 내는 소리의 진동수는 $f_0 = V/\lambda$ 로 일정하다. 음원이 스크린 쪽으로 속력 v_s 로 움직이면 한 주기 $1/f_0$ 동안 음원 자신이 v_s/f_0 만큼 따라가므로, 앞으로 나아가는 파동의 파장은

$$\lambda'(t) = \frac{V - v_s(t)}{f_0} = \lambda \left(1 - \frac{v_s(t)}{V} \right)$$

로 압축된다. 소리가 스크린에 도달하는 시간 t_0 는 T 에 비해 무시할 수 있으므로, 시각 t 에 스크린에 도달하는 파동의 파장은 같은 시각 음원의 속도로 결정된다고 보면 된다.

이 파장의 음파가 간격 d 인 이중 슬릿을 지나 거리 L 의 스크린에 도달하므로, (1-1)과 같은 논리로 인접한 극대점 사이의 거리는 $\Delta y = \lambda' L/d$ 이다. 따라서

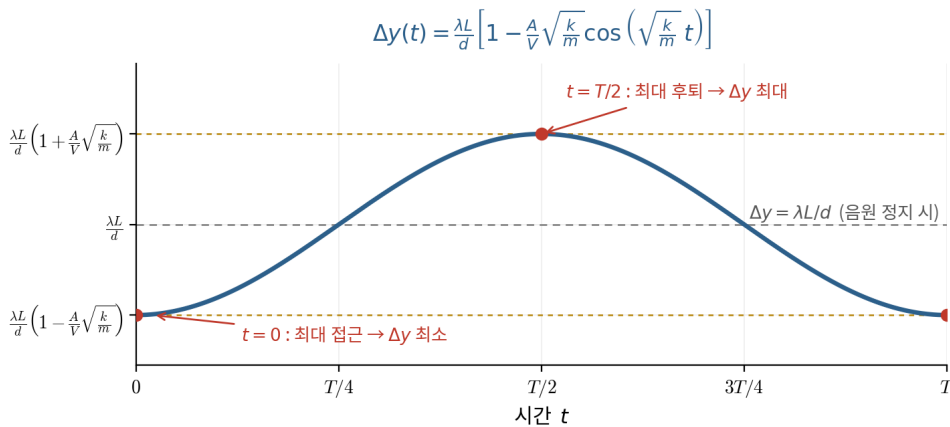
$$\Delta y(t) = \frac{\lambda L}{d} \left[1 - \frac{A}{V} \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) \right]$$

(1-4) 계속 — 한 주기 동안의 변화

$\cos(\omega t)$ 는 한 주기 동안 $+1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow +1$ 로 변하므로

- $t = 0$ (음원이 원점을 지나며 스크린 쪽으로 최대 속력): 파장이 가장 짧아져 Δy 가 **최솟값** $\frac{\lambda L}{d} \left(1 - \frac{A}{V} \sqrt{k/m} \right)$.
- $t = T/4$ (음원이 $x = A$ 에서 순간 정지): $v_s = 0$ 이라 도플러 효과가 사라져 $\Delta y = \lambda L/d$ (정지 음원과 같음).
- $t = T/2$ (스크린에서 멀어지며 최대 속력): 파장이 가장 길어져 Δy 가 **최댓값** $\frac{\lambda L}{d} \left(1 + \frac{A}{V} \sqrt{k/m} \right)$.
- $t = 3T/4$ 에서 다시 $\Delta y = \lambda L/d$ 가 되고, $t = T$ 에서 최솟값으로 돌아온다.

즉 Δy 는 평균값 $\lambda L/d$ 를 중심으로 진폭 $(\lambda L/d)(A/V)\sqrt{k/m}$ 인 코사인 꼴로 주기 T 로 진동하되, 음원의 변위 $x(t)$ 보다 위상이 $\pi/2$ 앞선 속도에 의해 결정되므로 $x(t)$ 와는 $-\cos$ 관계가 된다.



예시 작도 — 한 주기 동안 극대점 간격 $\Delta y(t)$ 의 변화 (그림은 $(A/V)\sqrt{k/m} = 0.45$ 인 경우)

(1-5) (1) 광전자(전자) (2) $t = 7T/8$ (3) $K_{\max} = \frac{6\sqrt{2}-4}{21} \frac{hc}{\lambda} \approx 0.214 \frac{hc}{\lambda}$

(1) 검출되는 입자와 검출/미검출의 이유 — 금속 표면에 빛을 쬔었을 때 광자가 아닌 채로 튀어나오는 입자는 광전자, 즉 전자이다.

광전 효과에서 전자가 방출되려면 광자 1개의 에너지가 일함수 W 보다 커야 한다. 즉 빛의 세기가 아니라 **진동수**가 문턱 진동수 $f_{\text{th}} = W/h$ 를 넘어야 한다. 광원이 정지해 있을 때 내는 빛의 진동수는 $f = c/\lambda$ 이고, 빛을 속도가 c 인 음파처럼 다루므로 광원이 금속 스크린 쪽으로 속력 v_s 로 다가가면 도플러 효과에 의해 청색 편이가 일어나 스크린에 도달하는 빛의 진동수는

$$f'(t) = f \frac{c}{c - v_s(t)}, \quad v_s(t) = A \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) = \frac{c}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

가 된다. $0 \leq t \leq T/2$ 에서 v_s 는 최댓값 $c/(2\sqrt{2})$ 에서 단조 감소하므로 f' 도 단조 감소한다.

① **일함수의 결정** — 검출이 끝나는 순간이 정확히 $t = T/8$ 이므로, 그 순간의 광자 에너지가 곧 일함수와 같다. $t = T/8$ 에서 $2\pi t/T = \pi/4$ 이므로

$$v_s(T/8) = \frac{c}{2\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{c}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{c}{4}, \quad f'(T/8) = f \frac{c}{c - c/4} = \frac{4}{3}f.$$

$$W = hf'(T/8) = \frac{4}{3}hf = \frac{4hc}{3\lambda}, \quad f_{\text{th}} = \frac{4}{3}f$$

즉 문턱 진동수가 정지 광원의 진동수 f 보다 크므로, 광원이 멈춰 있다면 아무리 오래 비추어도 전자는 나오지 않는다.
검출 조건은

$$f'(t) \geq f_{\text{th}} \Leftrightarrow \frac{c}{c - v_s} \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow v_s(t) \geq \frac{c}{4}$$

이다. t 가 0 에서 커질수록 광원의 접근 속력이 줄어 청색 편이가 약해지고, $t = T/8$ 에서 v_s 가 $c/4$ 아래로 떨어지는 순간부터 광자 에너지가 일함수에 못 미쳐 광전자가 더 이상 나오지 않는다.

(1-5) 계속 — 다시 검출되는 시각과 최대 운동 에너지

(2) 다시 검출되기 시작하는 시각 — 검출 조건 $v_s(t) \geq c/4$ 를 $v_s = (c/(2\sqrt{2})) \cos(2\pi t/T)$ 에 대입하면

$$\frac{c}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \geq \frac{c}{4} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \geq \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다. $0 \leq t \leq T$ 에서 $2\pi t/T$ 는 0 부터 2π 까지 **훑으므로** $\cos \geq 1/\sqrt{2}$ 인 구간은

$$0 \leq \frac{2\pi t}{T} \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{및} \quad \frac{7\pi}{4} \leq \frac{2\pi t}{T} \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{T}{8} \quad \text{및} \quad \frac{7T}{8} \leq t \leq T$$

이다. 즉 $T/8 < t < 7T/8$ 에서는 접근 속력이 $c/4$ 에 못 미치거나 광원이 멀어져(적색 편이) 검출되지 않는다.

다시 검출되기 시작하는 시각

$$t = \frac{7}{8}T$$

(1-5) 계속 — 최대 운동 에너지

(3) 광전자의 최대 운동 에너지 — 광전 효과에서 $K_{\max} = hf' - W$ 이고 W 는 일정하므로, f' 가 가장 큰 순간 즉 접근 속력이 최대인 $t = 0$ 에서 최대가 된다. 이때

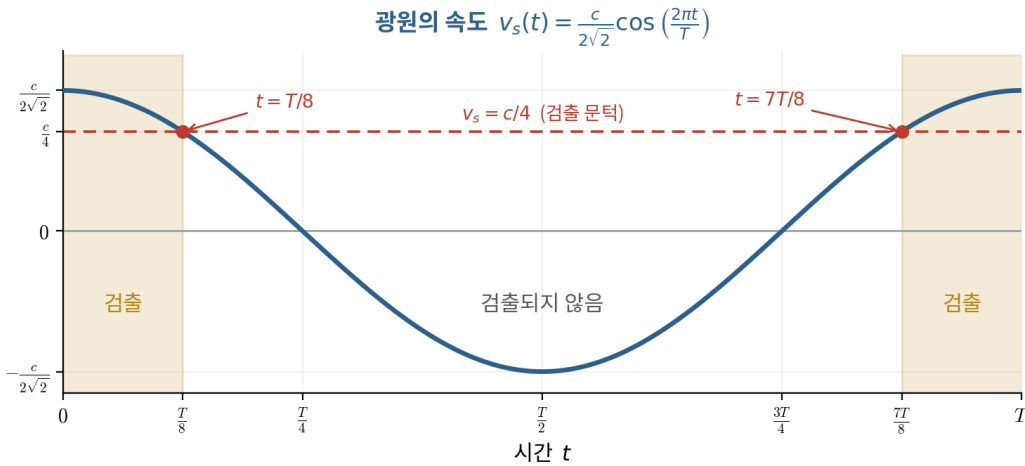
$$v_{s,\max} = A\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{2\sqrt{2}} \rightarrow f'_{\max} = f \frac{c}{c - c/(2\sqrt{2})} = f \frac{1}{1 - 1/(2\sqrt{2})} = f \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1}.$$

분모를 유리화하면 $(2\sqrt{2})/(2\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}(2\sqrt{2} + 1)/7 = (8 + 2\sqrt{2})/7$ 이므로

$$K_{\max} = hf'_{\max} - W = hf \left(\frac{8 + 2\sqrt{2}}{7} - \frac{4}{3} \right) = hf \frac{3(8 + 2\sqrt{2}) - 28}{21} = \frac{6\sqrt{2} - 4}{21} hf.$$

$$K_{\max} = \frac{6\sqrt{2} - 4}{21} hf = \frac{6\sqrt{2} - 4}{21} \cdot \frac{hc}{\lambda} \approx 0.214 \frac{hc}{\lambda}$$

광원의 접근 속력이 클수록 청색 편이가 커져 $K_{\max}$ 도 커지고, 접근 속력이 문턱값 $c/4$ 로 떨어지면 $K_{\max} \rightarrow 0$ 이 되어 광전자가 겨우 표면을 벗어나는 상태가 된다. 검출 여부가 광원의 위치가 아니라 속도로 결정된다는 점이 이 문항의 핵심이다.



예시 작도 — 광원의 속도 $v_s(t)$ 와 검출 문턱 $v_s = c/4$. 한 주기 중 $0 \leq t \leq T/8$ 과 $7T/8 \leq t \leq T$ 에서만 광전자가 검출된다.

문제 2 n 차원 우주의 중력과 전기력 — 궤도·보어 모형·화학 결합 등속 원운동 · 로그 퍼텐셜 · 보어 모형 · 전기력선

(2-1) (1) $\frac{9GMm}{20R}$ (2) $-\frac{9GMm}{10R}$ (3) 0 (4) $-G'Mm \ln 10$

우주 U (역제곱 중력). 반지름 r 의 등속 원운동에서 중력이 구심력이므로

$$G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$$

이고, 퍼텐셜 에너지는 무한대를 기준으로 $U(r) = -GMm/r$ 이다. $r_1 = R, r_2 = 10R$ 을 대입하면

(1)

$$K_1 - K_2 = \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{2 \cdot 10R} = \frac{GMm}{2R} \left(1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{9}{20} \frac{GMm}{R}$$

(2)

$$U_1 - U_2 = -\frac{GMm}{R} - \left(-\frac{GMm}{10R} \right) = -\frac{GMm}{R} \left(1 - \frac{1}{10} \right) = -\frac{9}{10} \frac{GMm}{R}$$

행성 1이 안쪽에 있으므로 운동 에너지는 더 크고($K_1 > K_2$) 퍼텐셜 에너지는 더 낮다($U_1 < U_2$). 두 차이의 비가 $|U_1 - U_2| = 2(K_1 - K_2)$ 인 것은 역제곱 힘에서 성립하는 비리얼 관계 $U = -2K$ 의 결과이다.

(2-1) 계속 — 우주 U' 의 경우

$F' = G' Mm/r$ 이므로 같은 방식으로 구심력 조건을 쓰면

$$G' \frac{Mm}{r} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow v^2 = G' M \quad (\text{반지름 } r \text{ 에 무관!})$$

이므로 궤도 속력이 모든 반지름에서 $v = \sqrt{G'M}$ 로 같고 운동 에너지도 $K' = \frac{1}{2}G'Mm$ 으로 반지름과 무관하게 일정하다. 따라서

(3)

$$K'_1 - K'_2 = \frac{1}{2}G'Mm - \frac{1}{2}G'Mm = 0$$

퍼텐셜 에너지는 퍼텐셜 에너지 토막글의 정의대로 인력의 크기와 같고 방향이 반대인 힘이 해 준 일로 구한다. r_A 에서 r_B 까지

$$U'(r_B) - U'(r_A) = \int_{r_A}^{r_B} G' \frac{Mm}{r} dr = G' Mm [\ln r]_{r_A}^{r_B} = G' Mm \ln \frac{r_B}{r_A}$$

즉 $U'(r) = G' Mm \ln r + \text{상수}$ 이다 ($y = 1/x$ 토막글). 그러므로

(4)

$$U'_1 - U'_2 = G' Mm \ln \frac{R}{10R} = G' Mm \ln \frac{1}{10} = -G' Mm \ln 10$$

U' 에서는 퍼텐셜 에너지 차이가 **두 반지름의 비**에만 의존하며, $r \rightarrow \infty$ 에서 U' 가 발산한다는 점이 3차원과 결정적으로 다르다.

(2-2) $T^2 \propto r^2$ (즉 $T \propto r$) 로 바뀐다

우주 U 에서는 $v^2 = GM/r$ 이므로 $T = 2\pi r/v = 2\pi r^{3/2}/\sqrt{GM}$, 곧 $T^2 = 4\pi^2 r^3/(GM) \propto r^3$ 이 케플러 제3법칙이다.

우주 U' 에서는 (2-1)에서 보았듯 궤도 속력이 $v = \sqrt{G'M}$ 로 반지름과 무관하게 일정하다. 따라서 주기는

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{G'M}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G'M} r^2 \Rightarrow T^2 \propto r^2 \quad (T \propto r)$$

비례 상수 $T^2/r^2 = 4\pi^2/(G'M)$ 은 항성의 질량 M 에만 의존하므로, “같은 항성을 도는 모든 행성에서 T^2/r^2 이 일정하다”는 형태의 법칙이 된다.

우주 U 에서는 바깥 행성일수록 느리게 돌아 주기가 반지름의 $3/2$ 제곱에 비례했지만, U' 에서는 모든 행성이 같은 속력으로 돌기 때문에 주기가 궤도 둘레(반지름)에 단순 비례한다.

$$(2-3) (1) r'_n = \frac{nh}{2\pi q_e \sqrt{k'm_e}}, E'_n = \frac{1}{2}k'q_e^2 + k'q_e^2 \ln n + \text{상수} \quad (2) \lambda = \frac{hc}{k'q_e^2 \ln(n_2/n_1)}$$

(1) 반지름과 에너지 — 우주 U' 의 가상 수소 원자에서 전자에 작용하는 쿨롱 인력은 $F' = k'q_e^2/r$ 이고, 이것이 구심력이므로

$$\frac{k'q_e^2}{r} = \frac{m_e v^2}{r} \rightarrow v^2 = \frac{k'q_e^2}{m_e}, \quad v = q_e \sqrt{\frac{k'}{m_e}} \quad (\text{양자수 } n \text{ 에 무관})$$

이다. 보어의 양자 가설 $m_e v r = nh/(2\pi)$ 에 대입하면

$$r'_n = \frac{nh/(2\pi)}{m_e v} = \frac{nh}{2\pi m_e \cdot q_e \sqrt{k'/m_e}} = \frac{nh}{2\pi q_e \sqrt{k'm_e}} = nr'_1 \quad (\propto n)$$

즉 U 에서 $r_n \propto n^2$ 이던 것이 U' 에서는 $r'_n \propto n$ 이 된다.

(2-3) 계속 — 에너지 준위

에너지는 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 합인데, 운동 에너지는

$$K = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{1}{2}k'q_e^2 \quad (\text{모든 } n \text{ 에서 같음})$$

이고 퍼텐셜 에너지는 (2-1)과 같은 방식으로 $U'(r) = k'q_e^2 \ln r + \text{상수}$ 이다. $r = r'_1$ 에서 $U' = 0$ 이 되도록 상수를 잡으면 $U'(r) = k'q_e^2 \ln(r/r'_1)$ 이고 $r'_n = nr'_1$ 이므로

$$E'_n = K + U'(r'_n) = \frac{1}{2}k'q_e^2 + k'q_e^2 \ln n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(U' 의 기준점을 어디로 잡느냐에 따라 전체가 상수만큼 이동하지만, 물리적으로 의미 있는 준위 사이의 차이는 달라지지 않는다.)

U 에서 $E_n = -|E_1|/n^2$ 이 위로 유계이며 0 에 수렴하던 것과 달리, U' 에서는 E'_n 이 $\ln n$ 으로 **한없이 증가**한다.

(2-3) 계속 — 방출되는 빛의 파장

$n_2 \rightarrow n_1$ 전이에서 방출되는 광자의 에너지는

$$\Delta E = E'_{n_2} - E'_{n_1} = k'q_e^2(\ln n_2 - \ln n_1) = k'q_e^2 \ln \frac{n_2}{n_1}$$

이고 광자 에너지는 hc/λ 이므로

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{k'q_e^2 \ln(n_2/n_1)}$$

파장이 두 양자수의 **비** n_2/n_1 에만 의존하므로, 예컨대 $2 \rightarrow 1$ 과 $4 \rightarrow 2$ 전이가 완전히 같은 파장의 빛을 낸다. U 의 수소 스펙트럼과는 전혀 다른 구조이다.

(2-4) (1) 무한대 — 유한한 에너지로는 전자를 떼어낼 수 없다 (2) U' 에서는 화학 결합이 성립하지 않는다

(1) **이온화 에너지** — 전자가 원자로부터 “완전히 벗어난다”는 것은 $r \rightarrow \infty$, 즉 $n \rightarrow \infty$ 를 뜻한다. (2-3)의 결과에서

$$E'_\infty - E'_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}k'q_e^2 + k'q_e^2 \ln n \right) - \frac{1}{2}k'q_e^2 = k'q_e^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$$

필요한 에너지 = ∞ (무한대). 즉 유한한 에너지로는 전자를 원자에서 떼어낼 수 없다.

이는 퍼텐셜 $U' = k'q_e^2 \ln r$ 이 $r \rightarrow \infty$ 에서 발산하기 때문이며, 전자는 아무리 큰 (유한한) 에너지를 받아도 더 큰 반지름의 속박 상태로 옮겨 갈 뿐 자유로워지지 못한다.

(2-4) 계속 — 화학 결합 관점의 차이

- **우주 U** — 이온화 에너지가 유한하므로 원자는 전자를 잃거나(양이온), 얻거나(음이온), 두 원자가 서로의 전자를 어느 정도 내놓아 공유할 수 있다. 이 과정에서 계 전체의 에너지가 낮아지면 이온 결합·공유 결합이 만들어지고, 분자와 다양한 화학이 존재한다.
- **우주 U'** — 전자를 원자로부터 떼어내려면 무한한 에너지가 필요하므로 이온화가 원리적으로 불가능하다. 전자는 언제나 자신의 원자핵에 완전히 속박되어 있어 다른 원자와 전자를 주고받거나 공유하는 일이 일어날 수 없다. 따라서 원자들 사이의 화학 결합이 형성되지 않고, 분자·화합물이 존재하지 않는 우주가 된다.
- 결국 U' 에서는 모든 물질이 서로 결합하지 못한 개별 원자 상태로만 존재하게 되어, 우리가 아는 화학과 생명 현상은 성립할 수 없다.

(2-5) 퍼텐셜 에너지 함수가 $-1/r$ (유한 깊이 우물)에서 $\ln r$ (가둠 퍼텐셜)로 바뀌기 때문

두 우주의 차이는 힘의 거리 의존성이 아니라, 그것을 적분해서 얻어지는 **퍼텐셜 에너지 함수의 개형**에서 비롯된다.

- 3차원 우주 $U - F \propto 1/r^2$ 을 적분하면

$$U(r) = -\frac{kq_e^2}{r}$$

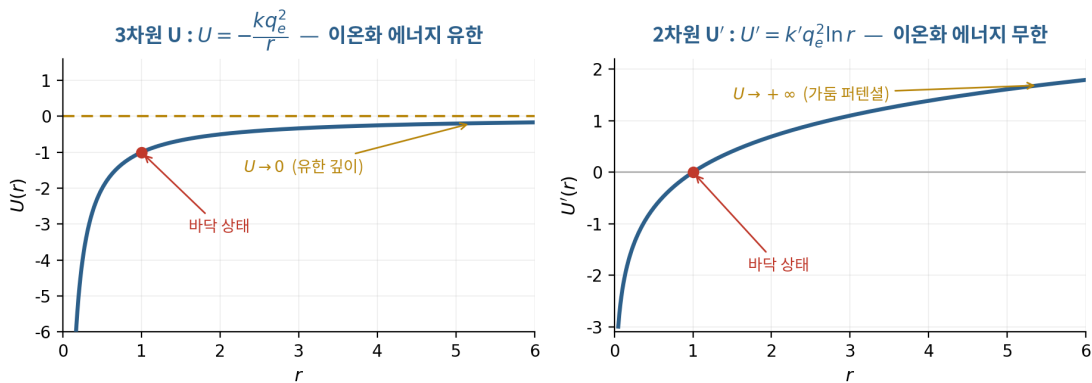
로, $r \rightarrow \infty$ 에서 0 에 수렴한다. 퍼텐셜 우물의 깊이가 유한하므로 전자를 무한히 멀리 보내는 데 드는 에너지도 유한하다. 그 결과 유한한 이온화 에너지, 0 에 수렴하는 에너지 준위 $E_n = -|E_1|/n^2$, 그리고 원자 사이의 전자 교환(화학 결합)이 가능해진다.

- 2차원 우주 $U' - F \propto 1/r$ 을 적분하면

$$U'(r) = k'q_e^2 \ln r + \text{상수}$$

로, $r \rightarrow \infty$ 에서 $+\infty$ 로 발산한다. 즉 아무리 멀리 가도 인력이 이겨내야 할 퍼텐셜 장벽이 끝없이 높아지는 **가둠 (confining) 퍼텐셜**이다. 그 결과 이온화 에너지가 무한대가 되고, 에너지 준위는 $E'_n \propto \ln n$ 으로 위로 유계가 아니며, 자유 전자가 존재할 수 없다.

수학적으로 보면 $\int^\infty (1/r^2)dr$ 은 수렴하지만 $\int^\infty (1/r)dr$ 은 발산한다는 차이가 전부이며, 이 한 가지가 “전자가 원자에서 벗어날 수 있는가”라는 미시 세계의 근본적 성질을 갈라놓는다.



예시 작도 — 3차원의 $-1/r$ 퍼텐셜(유한 깊이)과 2차원의 $\ln r$ 퍼텐셜(무한 가둠) 비교

(2-6) 전기력선의 총수가 보존되므로, 전기장의 세기는 전하를 둘러싼 “경계의 크기”에 반비례한다

정전하에서 나오는(또는 들어가는) 전기력선의 총 개수는 전하량에만 비례하고, 도중에 생기거나 사라지지 않는다. 따라서 전하를 중심으로 하는 어떤 닫힌 경계를 잡더라도 그것을 통과하는 전기력선의 총수는 같다. 전기장의 세기는 **단위 넓이(2차원에서는 단위 길이)당 전기력선의 밀도**이므로

- 3차원 공간 — 점전하를 반지름 r 인 구면으로 둘러싸면 경계의 넓이는 $4\pi r^2$ 이다. 전기력선의 총수 $N \propto q$ 가 이 넓이에 고르게 퍼지므로

$$E = \frac{N}{4\pi r^2} \propto \frac{q}{r^2} \rightarrow F = q_0 E \propto \frac{qq_0}{r^2}$$

로 역제곱 법칙이 된다.

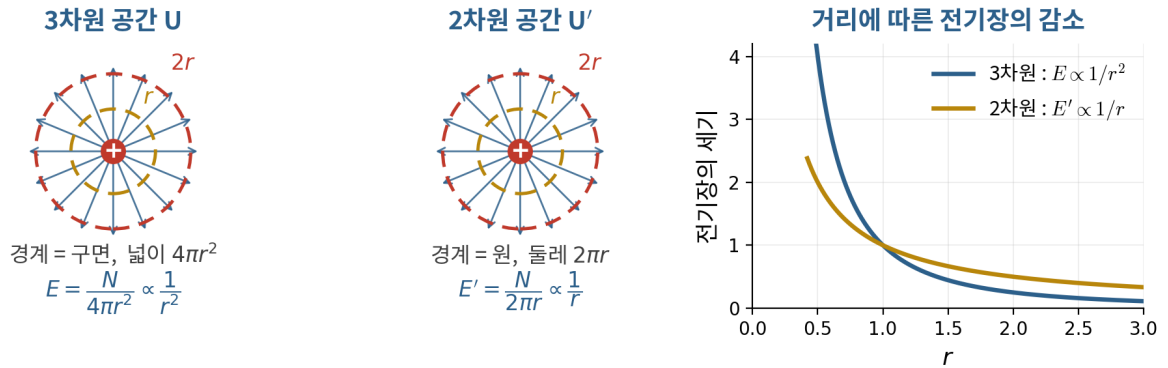
- 2차원 공간 — 점전하를 반지름 r 인 원(둘레)으로 둘러싸면 경계의 “크기”는 원의 둘레 $2\pi r$ 이다. 같은 총수의 전기력선이 이 길이에 퍼지므로

$$E' = \frac{N}{2\pi r} \propto \frac{q}{r} \rightarrow F' = q_0 E' \propto \frac{qq_0}{r}$$

로 전기력이 거리에 반비례한다.

(2-6) 계속 — 일반 D 차원으로의 확장

D 차원 공간에서 경계의 크기는 r^{D-1} 에 비례하므로 힘은 $1/r^{D-1}$ 을 따른다. $D = 3$ 이면 $1/r^2$, $D = 2$ 이면 $1/r$ 이 되는 것이다. 중력도 같은 기하학적 이유(질량에서 나오는 “중력선”의 총수 보존)로 2차원에서 $1/r$ 을 따르게 되며, 제시문의 $F'_{\text{중력}} = G' Mm/r$ 이 바로 그 결과이다.



예시 작도 — 같은 개수의 전기력선이 3차원에서는 넓이 $4\pi r^2$ 에, 2차원에서는 둘레 $2\pi r$ 에 퍼진다