

서울대학교 면접·구술고사

자연계열 · 물리학

문제 · 예시답안

시험 구분
전형
문항 수
핵심 개념

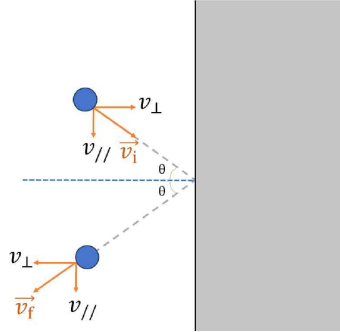
면접 및 구술고사 (자연계열, 물리학)
수시모집 일반전형
2문항 (소문항 8개)
비스듬한 탄성충돌과 포물선 운동, 사각 우물 속 왕복 조건,
줄에 켜 구슬의 평형과 타원 구속, 경사면에서의 등가속 운동,
광자의 운동량과 복사압, 접촉에 의한 전하 재분배,
평행 도선 사이의 자기력, 충격량-운동량 정리와 역학적 에너지 보존

I. 문제

문제 1 탄성충돌 — 빗면·사각 우물·팽팽한 줄·V자 구조물

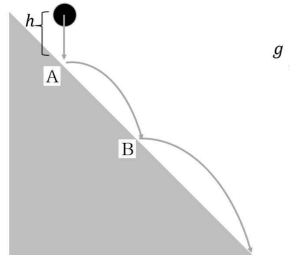
소문항 4개

다음의 문제에서 공은 질량은 있지만 크기를 무시할 수 있는 점입자로 가정하고, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다. 또한 모든 충돌은 탄성충돌로 가정한다. [그림 1]은 물체가 비스듬하게 벽면에 탄성충돌 하기 직전과 직후의 물체의 속도를 나타낸 그림이다. 고정된 벽면에 대한 수직 방향 속도 $v_{\perp}$ 는 충돌 전후에 크기는 같고 방향은 반대이며, 수평 방향 속도 $v_{\parallel}$ 는 충돌 전후에 크기와 방향이 모두 같다. 위 내용을 이용하여 아래 질문에 답하시오.



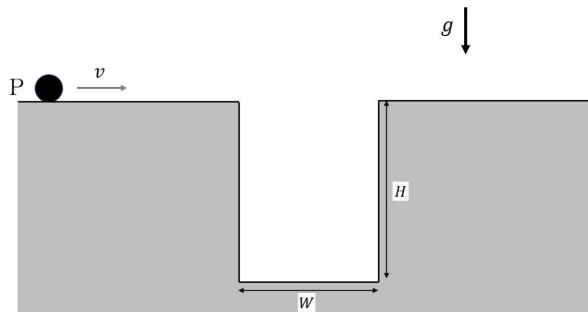
[그림 1] 벽면에 수직인 성분 $v_{\perp}$ 는 크기 보존·방향 반전, 벽면에 나란한 성분 $v_{\parallel}$ 는 그대로 유지

- (1-1) [그림 2]와 같이 각도가 45° 인 경사면 위의 A 지점으로부터 높이 h 인 지점에서 질량 m 인 공을 가만히 놓아 떨어뜨렸다. 공은 A 지점에서 경사면과 처음 충돌 후, 차례대로 B와 C 지점에서 경사면과 충돌하였다. 지점 B와 C 사이의 직선거리를 구하시오. (단, 중력가속도는 g 이고 공의 크기는 무시할 수 있다.)



[그림 2] 45° 빗면 — A 위 높이 h 에서 놓아 A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C 로 차례로 탄성충돌

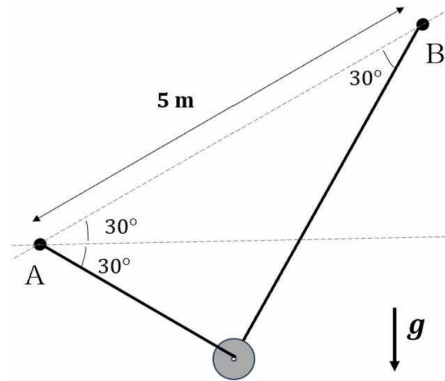
- (1-2) 다음의 [그림 3]과 같이 질량 m 인 공이 P 지점에서 v 의 속력으로 미끄러지며 이동하고 있다. 사각 우물의 바닥 면의 폭은 W 이고 깊이는 H 이다. (단, 중력가속도는 g 이고 공의 크기는 무시할 수 있다.)



[그림 3] 폭 W , 깊이 H 의 사각 우물 — 공이 왼쪽 모서리 P에서 수평 속력 v 로 진입

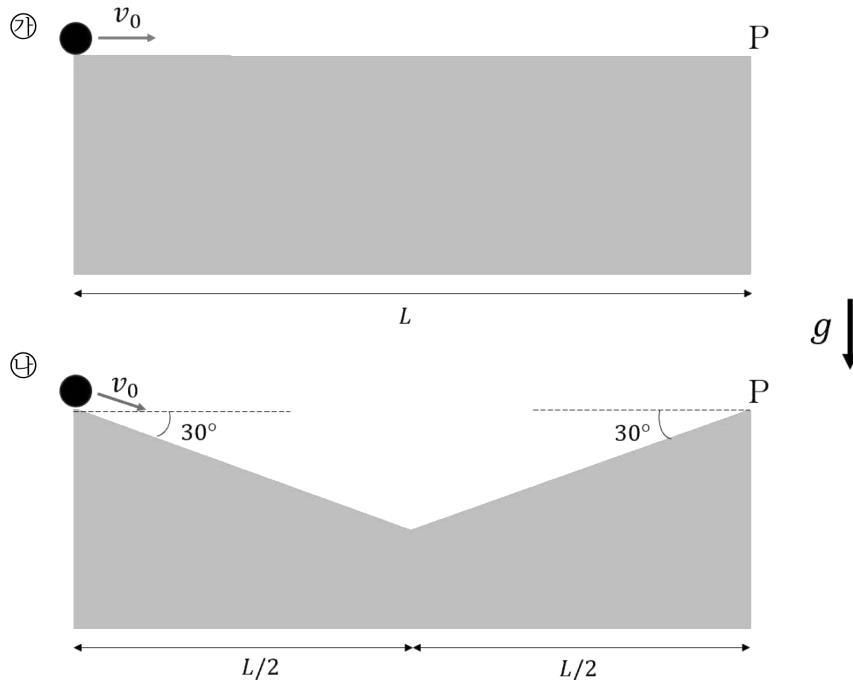
- 우물의 바닥 면에 1회 충돌하고 공이 P 지점으로 돌아올 수 있는가? 돌아올 수 있으면 이때 가능한 공의 속력 v 의 최솟값은 무엇인가?
- 우물의 바닥 면에 2회 충돌하고 공이 P 지점으로 돌아올 수 있는가? 돌아올 수 있으면 이때 가능한 공의 속력 v 의 최솟값은 무엇인가?
- 우물의 바닥 면에 3회 충돌하고 공이 P 지점으로 돌아올 수 있는가? 돌아올 수 있으면 이때 가능한 공의 속력 v 의 최솟값은 무엇인가?

- (1-3) 벽면에 고정된 두 점 A와 B에 대해서 AB를 연결한 선분(길이 5 m)이 수평 방향에 대해 30° 의 각을 이루고 있다. 질량 m 인 공에 매우 작은 구멍을 뚫고 길이가 L 인 줄에 꿰어 공이 줄 위에서 자유롭게 이동할 수 있게 하고, 줄의 양 끝을 점 A와 B에 고정하였다. 이때 공에는 고정장치가 있어 줄 위의 위치를 고정할 수 있다. (단, 중력가속도는 g 이며 공과 고정장치의 크기는 무시할 수 있고 고정장치와 줄의 질량은 0이다.)



[그림 4] 선분 AB(길이 5 m)가 수평과 30° — A쪽 줄은 수평과 30° , B쪽 줄은 수평과 60°

- (a) [그림 4]와 같이 줄 위의 한 점에서 공을 움직이지 못하도록 고정장치로 고정하였다. 이때 중력에 의해 줄이 그림과 같은 각도로 팽팽하게 당겨졌다고 할 때, 줄이 A점과 B점에 가하는 힘의 크기를 각각 구하시오.
- (b) (a)의 경우 고정장치를 풀어주면 공은 움직이는가? 뉴턴의 법칙을 활용하여 정성적으로 설명하시오.
- (c) 공의 고정장치를 풀고 줄을 팽팽하게 유지하며 공을 줄 위의 다른 점으로 이동시키고 정지상태로 놓았다. 이때는 고정장치로 고정하지 않아도 공이 움직이지 않았다. 이 경우 공의 높이가 (b)에서 고정장치를 푼 직후보다 높은지 낮은지 역학적 에너지의 관점에서 설명하시오.
- (1-4) [그림 5]와 같이 수평 길이가 L 인 두 가지 구조물이 있다. 구조물 ㉑의 표면은 수평이고, 구조물 ㉒의 표면은 30° 의 내리막과 오르막이 좌우 대칭 형태를 띠고 있다. 각 구조물 왼쪽 끝에서 표면에 평행하게 공을 v_0 의 속력으로 동시에 출발시켰다. L 이 어떤 $L_{\min}$ 보다 크면 구조물 ㉒를 따라 움직인 공이 구조물 ㉑를 따라 움직인 공보다 오른쪽 끝점 P에 더 일찍 도착한다. 이때 $L_{\min}$ 을 구하시오. (단, 중력가속도는 g 이고 공의 크기는 무시할 수 있으며, 모든 경우 공은 지면에서 떨어지지 않고 미끄러져 움직인다. 구조물 ㉒의 경사각은 L 과 무관하게 30° 로 항상 일정하다.)



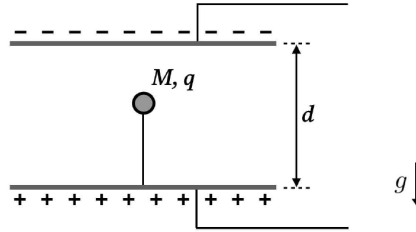
[그림 5] 수평 구조물 ㉑와 30° 내리막·오르막이 좌우 대칭인 V자 구조물 ㉒ — 두 공 모두 왼쪽 끝에서 표면에 평행하게 v_0 로 출발해 오른쪽 끝점 P를 향한다

문제 2 전자기 — 복사압·평행판 대전·평행 도선의 자기력

소문항 4개

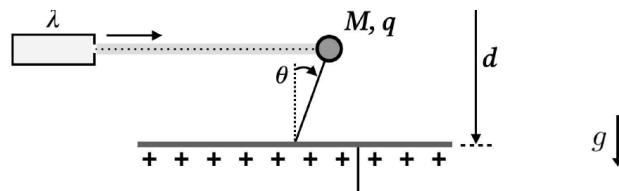
상황 ㉠

전하 q (> 0) 를 가진 가벼운 금속공이, 고정되어 움직이지 않는 평행판 축전기 사이의 균일한 수직방향 전기장 속에 위치하고 있다. 평행판 사이의 거리는 d , 그 사이의 전압은 V 이므로 전기장의 크기는 V/d 이다. 질량이 M 인 금속공은, 질량을 무시할 수 있으며 전류가 흐르지 않는 실에 의해 아래쪽 평행판에 묶여 있다. [그림 6]에서와 같이 금속공을 묶어놓은 실은 팽팽하게 당겨진 상태이다. (단, 금속공의 크기는 매우 작아 점입자로 간주할 수 있으며, 금속공에 추가로 유도되는 정전기나 유전분극 현상은 무시한다. 금속공이 평행판으로부터 떨어져 있을 때는, 두 평행판 내부의 전하 분포 역시 금속공의 전하로부터 영향을 받지 않는다고 가정한다. 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.)



[그림 6] 상황 ㉠ — 전하 $+q$ ·질량 M 인 금속공이 간격 d ·전압 V 인 평행판 사이에서 아래 판에 실로 묶여 있다

- (2-1) 상황 ㉠에서 묘사한 상태의 금속공에 [그림 7]과 같이 파장이 λ 인 단색광 레이저 빛을 일정한 출력(일률)으로 계속 쏘아주니, 금속공을 묶어놓은 실이 수직 방향과 각 θ 를 만들면서 평형상태를 이루었다. 광자들은 아래 토막글 「파동의 이중성」에 설명된 것처럼 에너지와 운동량을 가지는 고전적인 입자로 간주할 수 있으며, 금속공의 표면에 충돌한 후 입사 속력과 같은 속력을 갖고 입사 방향과 정확히 반대 방향으로 튀어나온다고 가정한다. 이때, 레이저에서 단위 시간당 방출되는 광자의 개수를 주어진 다른 변수들로 표현하시오. (단, 중력가속도는 g , 플랑크 상수는 h , 빛의 속도는 c 이다. 레이저에서 방출된 후 금속공에 도달할 때까지 손실되는 광자는 없으며, 레이저 빛은 평행판과는 평행을 이루며 금속공 표면에는 수직으로 입사하고 있다. 또한, 사용된 레이저 빛은 금속공에서 광전효과를 일으키지 않으며, 금속공 표면에서 반사된 광자들은 금속공으로 입사하는 광자들의 움직임에 영향을 주지 않는다고 가정한다.)

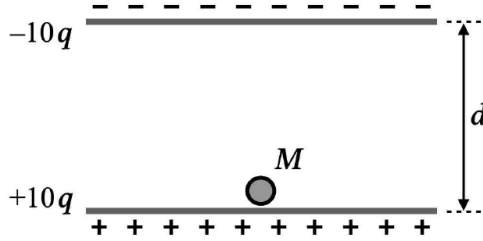


[그림 7] 수평으로 입사한 레이저(파장 λ)가 금속공에서 정반사되어 실이 연직과 각 θ 를 이룬다

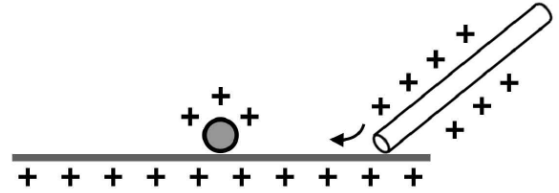
토막글 : 파동의 이중성

아인슈타인 등이 제창하고 실험을 통해 검증된 광양자 이론에 따르면 빛(파동)은 입자의 성질을 띠며, 파장이 λ 인 단색광을 구성하는 광자(빛알갱이) 1개는 hc/λ 로 기술되는 에너지와 h/λ 로 기술되는 운동량을 갖는다.

- (2-2) 이번에는 상황 ㉠에서 묘사한 실험기구를 중력을 무시할 수 있는 공간으로 옮겼다. 축전기에 가해진 전압을 조절하여 각 평행판에 대전된 전하량이 각각 $+10q$ 와 $-10q$ 가 되게 한 후, 평행판에 연결된 전선을 끊어 [그림 8]과 같은 상태를 만들었다. 이제 전하가 없는 금속공을 아래쪽 평행판에 닿도록 가만히 놓았다(초기속도는 0이다). 이후 금속공의 운동이 어떻게 될지, 특히 (a) 가속도와 (b) 속도가 어떻게 변화할지를, 아래 사전실험의 내용을 고려하여 정성적으로 설명하시오. (단, 평행판과 금속공의 충돌은 탄성충돌이고, 매우 짧은 시간 동안 일어나며, 이 시간 동안 전하 교환을 통해 정전기적 평형상태에 이른다고 가정한다. 평행판의 크기는 매우 커서 그 사이의 전기장은 항상 수직이라 가정하며, 전자기파의 방사에 의한 영향은 무시한다.)



[그림 8] 중력이 없는 공간 — 위 판 $-10q$, 아래 판 $+10q$, 전선은 끊긴 상태



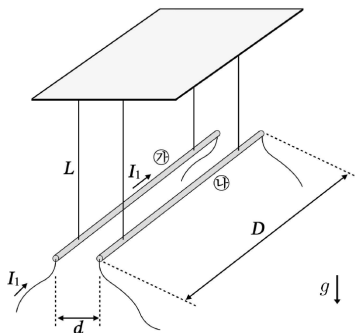
[그림 9] 사전실험 — 맞닿은 평행판과 금속공에 대전체를 접촉시킨 뒤 분리

사전실험

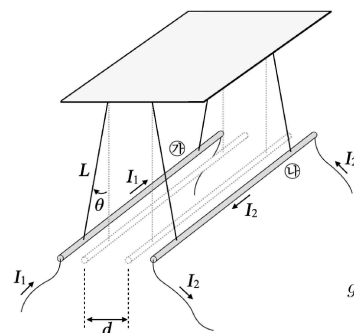
전하를 띤 두 도체가 서로 접촉하면 매우 빠른 속도로 전하를 나눠 가짐으로써 전하밀도가 균일한 정전기적 평형상태에 이르게 된다. 이제 본 실험에 사용할 전하가 없는 평행판 1개와 금속공을 서로 맞닿아 있게 해 놓은 상태에서 [그림 9]와 같이 대전체를 가져다 대었다. 대전체를 제거하고 평행판과 금속공을 분리한 뒤, 각 물체에 대전된 전하량을 측정하여 보니 그 비율이 평행판 : 금속공 = 9 : 1 이었다.

상황 ㉠

질량이 M , 길이가 D , 반지름이 R 인 원기둥 모양의 구리막대 ㉠, ㉡가 길이가 L 이고 전류가 흐르지 않는 실 4개에 의해 [그림 10]과 같이 천장에 매달려 있다. 두 막대는 서로에 대해서는 평행을, 지면에 대해서는 수평을 이루고 있다. 이들 막대는 느슨한 전선과 각각 연결되어 서로 다른 전류가 흐를 수 있다. 두 막대 사이의 간격 d 에 비해 막대의 반지름 R 은 매우 작고, 길이 D 는 매우 커서, 막대 ㉠에 전류 I_1 이 흐르는 경우 이로부터의 거리가 r 인 지점에서 자기장의 세기는 비례상수 k 를 이용하여 $B = k(I_1/r)$ 로 나타낼 수 있다. (단, 막대 양 끝에 연결된 느슨한 전선에 의한 자기장은 무시하며 느슨한 전선과 실의 질량은 무시한다. 중력가속도는 g 이며, 모든 마찰과 공기 저항은 무시한다.)



[그림 10] 상황 ㉠ — 두 구리막대 ㉠, ㉡가 길이 L 인 실 4개로 천장에 매달려 있고 간격은 d

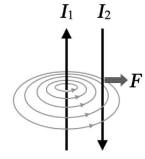


[그림 11] 전류 I_1, I_2 가 서로 반대 방향이면 척력으로 실이 연직과 각 θ 만큼 벌어진다

- (2-3) 상황 ㉔에서 묘사한 구리막대 ㉔, ㉕ 에 각각 전류 I_1, I_2 를 계속 흘려주자, [그림 11]과 같이 막대를 매단 실이 수직방향과 각 θ 를 만들면서 평형상태를 이루었다. 이때, 아래 토막글을 참고하여 두 전류의 곱 $I_1 I_2$ 를 주어진 다른 변수들로 표현하시오.

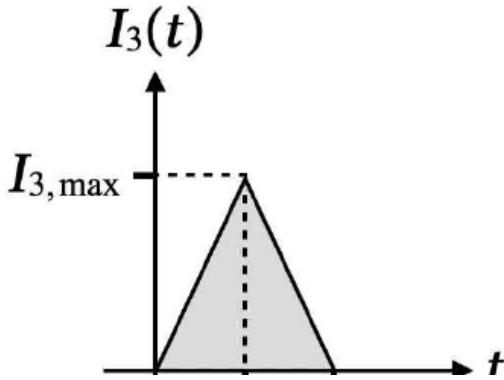
토막글 : 평행한 두 직선 도선 사이에 작용하는 힘

전류가 흐르는 평행한 두 직선 도선이 가까이 있으면, 두 도선은 각각 자기장을 형성하는 한편 상대가 만든 자기장 속에 놓이게 되므로 힘을 받게 된다. 거리 r 만큼 떨어져 있고 충분히 긴 두 직선 도선(길이 D)에 서로 다른 방향으로 전류 I_1, I_2 가 흐르는 경우, 두 도선 사이에는 [그림 12]와 같이 서로 밀어내는 힘이 작용하며 그 크기는 $F = kI_1 I_2 D / r$ 이다.

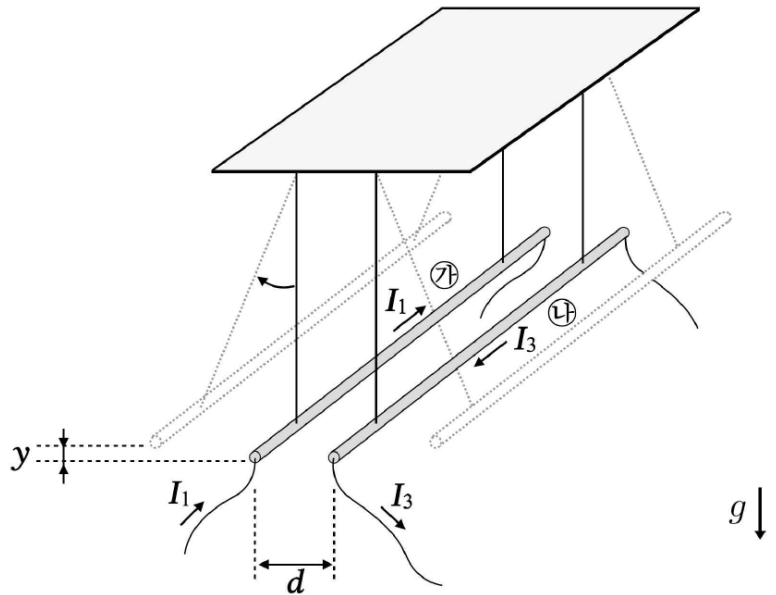


[그림 12] 반대 방향 전류
→ 척력

- (2-4) 이제는 위 상황 ㉔에서 묘사한 구리막대 2개 중 ㉔에만 전류 I_1 이 계속 흐르고 있다. 시간 $t = 0$ 부터 아주 짧은 시간 Δt 동안 막대 ㉕ 에 전류 $I_3(t)$ 가 [그림 13]과 같은 형태로 흘렀고(최댓값 $I_{3,\max}$), 그 결과 두 막대는 서로 밀려나기 시작했다. 이어진 막대의 운동은 [그림 14]에서처럼 두 막대가 처음 위치보다 수직 방향으로 y 만큼 움직인 순간 잠시 멈추었다. Δt 동안 막대가 밀려난 거리는 무시할 수 있을 만큼 작다고 할 경우, 변위 y 를 주어진 다른 변수들로 표현하시오.



[그림 13] 막대 ㉕ 의 전류 $I_3(t) - t = 0$ 과 $t = \Delta t$ 에서 0, 중간에 최댓값 $I_{3,\max}$ 인 삼각형 펄스



[그림 14] 밀려난 두 막대가 실에 매달린 채 흔들려 처음보다 y 만큼 올라간 순간 정지한다

II. 예시답안

문제 1 탄성충돌 — 빗면·사각 우물·팽팽한 줄·V자 구조물

비스듬한 반사 · 포물선 운동 · 타원 구속 · 등가속 운동

$$(1-1) \overline{BC} = 8\sqrt{2} h$$

빗면과의 탄성충돌에서는 빗면에 수직인 속도 성분만 부호가 바뀌고 나란한 성분은 그대로 유지된다. 충돌과 충돌 사이에는 중력만 작용하므로 각 구간은 포물선 운동이다.

A를 원점으로 하고 x 를 오른쪽, y 를 위로 잡으면 빗면은 직선 $y = -x$ 이고, 그 단위 법선벡터는 $\hat{n} = (1, 1)/\sqrt{2}$ 이다. 반사 후의 속도는

$$\vec{v}' = \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

로 구한다.

① **A 직전 속도** — 높이 h 에서 정지 상태로 놓았으므로 역학적 에너지 보존에서 $v_0 = \sqrt{2gh}$, 방향은 연직 아래이다. 즉 $\vec{v} = (0, -v_0)$.

② **A 직후 속도** — $\vec{v} \cdot \hat{n} = -v_0/\sqrt{2}$ 이므로

$$\vec{v}' = (0, -v_0) + v_0(1, 1) = (v_0, 0).$$

연직 낙하가 45° 면에서 반사되어 **수평 방향** 운동으로 바뀐다.

③ **A → B** — $x = v_0 t, y = -\frac{1}{2}gt^2$ 를 빗면 조건 $y = -x$ 에 넣으면

$$-\frac{1}{2}gt^2 = -v_0 t \Rightarrow t_{AB} = \frac{2v_0}{g}, \quad B = \left(\frac{2v_0^2}{g}, -\frac{2v_0^2}{g} \right).$$

따라서 $\overline{AB} = \sqrt{2} \cdot 2v_0^2/g = 4\sqrt{2} h$ ($v_0^2 = 2gh$ 대입).

④ **B 직전·직후 속도** — 직전 속도는 $(v_0, -gt_{AB}) = (v_0, -2v_0)$ 이고, $\vec{v} \cdot \hat{n} = (v_0 - 2v_0)/\sqrt{2} = -v_0/\sqrt{2}$ 이므로

$$\vec{v}' = (v_0, -2v_0) + v_0(1, 1) = (2v_0, -v_0).$$

빗면에 나란한 속도 성분이 $\sqrt{2}v_0 \rightarrow 2\sqrt{2}v_0$ 로 두 배가 된 것이 핵심이다.

⑤ **B → C** — B를 기준으로 $\Delta x = 2v_0 t, \Delta y = -v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ 이고 $\Delta y = -\Delta x$ 에서

$$-v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = -2v_0 t \Rightarrow t_{BC} = \frac{2v_0}{g}, \quad \Delta x = \frac{4v_0^2}{g}.$$

$$\overline{BC} = \sqrt{2} \cdot \frac{4v_0^2}{g} = \frac{4\sqrt{2}v_0^2}{g} = 8\sqrt{2} h$$

충돌 사이의 시간 간격은 매번 $2v_0/g$ 로 일정하지만, 반사할 때마다 빗면에 나란한 속도가 $\sqrt{2}v_0$ 씩 일정하게 커지므로 충돌 간격은

$$\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \dots = 4\sqrt{2}h : 8\sqrt{2}h : 12\sqrt{2}h : \dots = 1 : 2 : 3 : \dots$$

로 등차수열을 이룬다. 구하는 값은 $\overline{BC} = 8\sqrt{2} h$ 이다.

(1-2) (a) 가능, $v_{\min} = W\sqrt{g/(2H)}$ (b) 불가능 (c) 가능, $v_{\min} = (W/3)\sqrt{g/(2H)}$

수평 운동과 연직 운동을 분리해서 본다. $\tau = \sqrt{2H/g}$ 를 **P의 높이에서 바닥까지 낙하하는 데 걸리는 시간**이라 하자.

① **연직 운동** — P에서 연직 속도 0으로 출발해 시각 τ 에 바닥에 닿고, 탄성 반사로 속력이 그대로 뒤집혀 다시 시각 2τ 에 처음 높이($y = 0$)로 되돌아온다. 그 순간 연직 속도는 다시 0이다. 이 운동이 그대로 되풀이되므로

• 바닥 충돌 시각 = $\tau, 3\tau, 5\tau, \dots$ (τ 의 홀수배)

• 입구 높이 $y = 0$ 에 오는 시각 = $2\tau, 4\tau, 6\tau, \dots$ (τ 의 짝수배)

② **수평 운동** — 벽면 충돌에서 수평 속력의 크기는 보존되고 방향만 뒤집히므로 $x(t)$ 는 폭 W 를 왕복하는 삼각파이다. $x = 0$ 또는 $x = W$ 가 되는 시각은 $vt = (\text{정수}) \times W$ 이며, 정수가 짝수이면 $x = 0$ (왼쪽), 홀수이면 $x = W$ (오른쪽) 이다.

- ③ **우물을 빠져나가는 순간** — 공이 우물 밖으로 나가는 것은 입구 높이 $y = 0$ 에 있으면서 동시에 $x = 0$ 또는 $x = W$ 인 순간이다. 이때 $x = 0$ 이면 P로 **복귀**, $x = W$ 이면 오른쪽 지면으로 **이탈**이다. (그 외의 시각에 $y = 0$ 이 되어도 $0 < x < W$ 이면 우물 위이므로 다시 떨어진다.)
- ④ **속력 조건** — 바닥 충돌을 n 회 한 뒤 P로 돌아왔다면, 나가는 시각은 $T = 2n\tau$ 이고 그 사이의 바닥 충돌은 $\tau, 3\tau, \dots, (2n-1)\tau$ 의 n 회이다. 한편 수평으로는 출발점 $x = 0$ 으로 되돌아왔으므로 이동 거리는 $vT = 2kW$ ($k =$ 오른쪽 벽 충돌 횟수 $= 1, 2, \dots$)이다. 따라서

$$v = \frac{2kW}{2n\tau} = \frac{kW}{n\tau}, \quad \text{최솟값은 } k = 1 : \quad v_{\min} = \frac{W}{n\tau} = \frac{W}{n} \sqrt{\frac{g}{2H}}.$$

- ⑤ **짝수 n 은 왜 불가능한가** — 위의 $v = kW/(n\tau)$ 에서 시각 $t' = n\tau$ 를 보자. n 이 짝수이면 t' 은 τ 의 짝수배이므로 공은 그때 입구 높이에 있고, 동시에

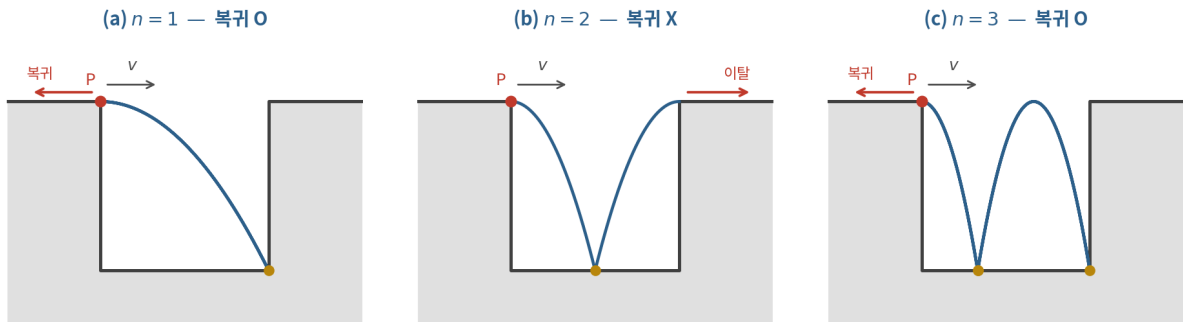
$$vt' = \frac{kW}{n\tau} \cdot n\tau = kW$$

이므로 $x = 0$ 또는 $x = W$ 이다. 즉 공은 $T = 2n\tau$ 보다 **먼저** $t' = n\tau$ 에 이미 우물을 빠져나간다. 이는 “바닥에 n 회 충돌했다”는 가정과 모순이다. 따라서 n 은 **홀수**여야 한다.

- ⑥ **홀수 n 의 확인** — $k = 1$, 즉 $v = W/(n\tau)$ 라 하자. 더 이른 입구 높이 시각 $2j\tau$ ($j < n$) 에서 $v \cdot 2j\tau = 2jW/n$ 이 W 의 정수배가 되려면 $n \mid 2j$ 이어야 하는데 n 이 홀수이므로 $n \mid j$, 즉 $j \geq n$ 이다. 그러므로 중간에 빠져나가는 일은 없다. 한편 시각 $t = n\tau$ (τ 의 홀수배)에 $x = W$ 이므로, 공은 **바닥과 오른쪽 벽이 만나는 모서리**에 정확히 도달한다. 모서리에서는 수평·연직 속도가 동시에 뒤집히므로 공은 왔던 길을 그대로 되짚어 시각 $2n\tau$ 에 P로 정확히 돌아온다.

$$(a) \quad n = 1 : v_{\min} = W \sqrt{\frac{g}{2H}} \quad (b) \quad n = 2 : \text{복귀 불가능} \quad (c) \quad n = 3 : v_{\min} = \frac{W}{3} \sqrt{\frac{g}{2H}}$$

즉 **바닥 충돌 횟수가 홀수**이면 오른쪽 벽 충돌이 바닥 모서리에서 일어나 경로가 되짚어지며 복귀하지만, **짝수**이면 그 전에 오른쪽 위 모서리에 연직 속도 0으로 도달해 그대로 지면 위로 미끄러져 나간다.



예시 작도 — $v = W/(n\tau)$ 일 때의 경로. 바닥 충돌점은 금색 점. $n = 1, 3$ 은 오른쪽 아래 모서리에서 경로가 되짚어져 P로 복귀하고, $n = 2$ 는 오른쪽 위 모서리에 연직 속도 0으로 도달해 이탈한다.

(1-3) (a) $T_A = \frac{1}{2}mg$, $T_B = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$ (b) 움직인다 (c) 더 낮다

(a) 선분 AB가 수평과 30° , A쪽 줄이 수평과 30° (아래쪽), B쪽 줄이 수평과 60° 를 이루므로 두 줄 사이의 각은 $180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$, 즉 두 줄은 서로 수직이다.

고정장치가 공을 붙잡고 있으므로 A쪽 구간과 B쪽 구간의 장력은 서로 달라도 된다. 이를 T_A, T_B 라 하고 공의 힘의 평형을 수평·연직으로 나누어 쓰면

$$\text{수평: } T_A \cos 30^\circ = T_B \cos 60^\circ, \quad \text{연직: } T_A \sin 30^\circ + T_B \sin 60^\circ = mg.$$

수평식에서 $T_A(\sqrt{3}/2) = T_B(1/2)$, 즉 $T_B = \sqrt{3}T_A$ 이다. 이를 연직식에 넣으면

$$T_A \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3}T_A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = T_A \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) = 2T_A = mg.$$

$$T_A = \frac{1}{2}mg \quad (= 0.5mg), \quad T_B = \frac{\sqrt{3}}{2}mg \quad (\approx 0.87mg)$$

줄이 고정점 A, B에 가하는 힘은 작용·반작용에 의해 각 구간의 장력과 크기가 같으므로 위와 같다. 두 줄이 직교하므로, 무게 mg 를 두 줄 방향으로 직교분해한 성분이 곧 장력이라고 보아도 같은 결과를 얻는다. 연직 아래 방향과 A쪽 줄이 이루는 각이 60° , B쪽 줄이 이루는 각이 30° 이므로 $T_A = mg \cos 60^\circ$, $T_B = mg \cos 30^\circ$.

(b) 움직인다. 고정장치를 풀면 구멍이 줄 위를 마찰 없이 미끄러지므로 줄 전체의 장력이 하나의 값 T 로 같아진다. 공이 받는 두 장력의 합은

$$T\hat{u}_A + T\hat{u}_B = T(\hat{u}_A + \hat{u}_B)$$

인데, 두 단위벡터의 합은 두 줄이 이루는 각의 이등분선 방향이다. 따라서 장력의 합력은 언제나 이등분선 방향을 향한다. 마찰 없는 구슬이 정지해 있으려면 이 합력이 무게 mg 와 정확히 반대, 즉 연직 위를 향해야 하고, 이는 두 줄이 연직선과 같은 각을 이룰 때에만 성립한다.

그런데 (a)의 배치에서 A쪽 줄은 연직선과 60° , B쪽 줄은 30° 로 서로 다르다. 그러므로 합력의 방향이 연직에서 벗어나 알짜힘이 0이 아니고, 뉴턴 제2법칙 $\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$ 에 의해 공은 가속되어 움직인다. 실제로 수평 성분만 보면

$$T \cos 30^\circ (\text{A쪽, 왼쪽}) > T \cos 60^\circ (\text{B쪽, 오른쪽})$$

이므로 알짜힘의 수평 성분은 A쪽(왼쪽)을 향하고, 공은 그쪽으로 미끄러지며 동시에 아래로 내려간다.

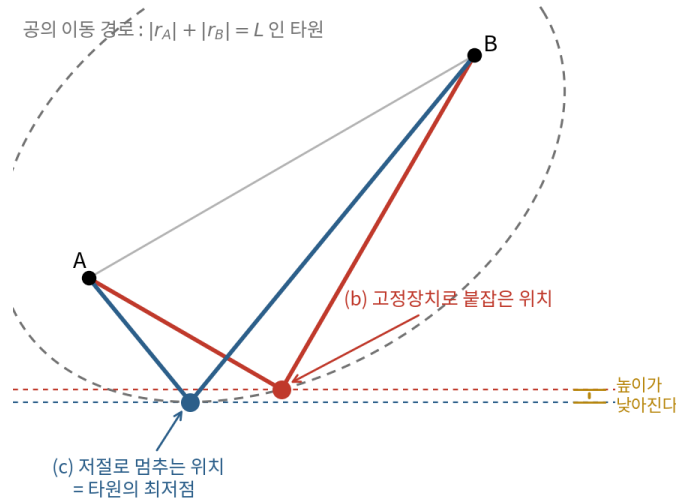
(c) (b)에서 고정장치를 푼 직후보다 낮다.

줄의 길이가 L 로 일정하므로 공의 가능한 위치는 A, B를 두 초점으로 하고 $|\vec{r}_A| + |\vec{r}_B| = L$ 을 만족하는 타원 위로 제한된다. (b)에서 보았듯 균일한 장력의 합력은 두 줄 방향의 각의 이등분선을 향하는데, 타원의 반사 성질에 의해 이 이등분선은 곧 타원의 법선 방향이다. 즉 장력의 합력은 공의 운동 방향(타원의 접선)에 언제나 수직이므로

장력이 공에 한 일 $W_T = 0$, 따라서 역학적 에너지 $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$ 가 보존된다.

결국 공에 일을 하는 힘은 중력뿐이다. 그러므로 접선 방향의 알짜힘은 중력의 접선 성분뿐이고, 고정하지 않아도 정지해 있는 자리는 그 성분이 0이 되는 자리, 곧 타원 위에서 중력 퍼텐셜 에너지 mgy 가 최소가 되는 최저점(안정 평형점)이다.

최저점은 타원 위의 모든 점 가운데 높이가 가장 낮은 점이므로, 최저점이 아닌 (b)의 위치보다 반드시 낮다. 에너지의 관점에서 다시 말하면, (b)의 위치에서 가만히 놓으면 그 점의 퍼텐셜 에너지가 최소가 아니어서 E 보존 하에 운동 에너지를 얻으며 아래로 미끄러진다. 저절로 멈추어 있을 수 있는 자리는 퍼텐셜 에너지가 최소인 더 낮은 자리뿐이다.



예시 작도 — 공의 이동 경로는 A·B를 초점으로 하는 타원. (b)의 위치(연직과 $60^\circ \cdot 30^\circ$, 비대칭)는 최저점이 아니므로 공은 두 줄이 연결과 같은 각을 이루는 최저점까지 내려가 멈춘다.

$$(1-4) L_{\min} = \frac{8(2\sqrt{3} - 3)}{3} \frac{v_0^2}{g} \approx 1.24 \frac{v_0^2}{g}$$

두 공 모두 지면을 떠나지 않고 미끄러지므로, 각 구조물에서의 운동은 표면을 따라가는 1차원 등가속 운동으로 다룬다. 마찰이 없으므로 경사면에서의 가속도는 중력의 빗면 성분 $g \sin 30^\circ = g/2$ 이다.

① 구조물 ㉑ (수평) — 표면이 수평이라 알짜힘이 0이고 공은 속력 v_0 로 등속 운동한다. 수평 길이가 L 이므로

$$t_{\text{㉑}} = \frac{L}{v_0}.$$

② 구조물 ㉒ 의 경사면 길이 — 내리막과 오르막의 수평 길이가 각각 $L/2$ 이고 경사각이 30° 이므로, 각 경사면을 따라 간 실제 이동 거리는

$$s = \frac{L/2}{\cos 30^\circ} = \frac{L}{\sqrt{3}}.$$

③ 골짜기 바닥에서의 속력 — 내리막에서 가속도는 운동 방향과 같은 쪽으로 $g/2$ 이므로

$$v_1^2 = v_0^2 + 2 \cdot \frac{g}{2} \cdot s = v_0^2 + \frac{gL}{\sqrt{3}}, \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{gL}{\sqrt{3}}}.$$

오르막에서는 같은 크기의 가속도가 운동 방향과 반대이고 이동 거리도 같은 s 이므로, P에 도착할 때의 속력은 $\sqrt{v_1^2 - gs} = v_0$ 로 출발할 때와 같다. (역학적 에너지 보존: 출발점과 P의 높이가 같다.) 또한 $v_1 > v_0 > 0$ 이므로 공은 반드시 오르막을 끝까지 올라간다.

④ 구조물 ㉒ 의 통과 시간 — 등가속 운동에서 $v = v_0 + at$ 이므로 내리막·오르막에 걸리는 시간은 각각 $(v_1 - v_0)/(g/2)$ 로 같다. 따라서

$$t_{\text{㉒}} = 2 \cdot \frac{v_1 - v_0}{g/2} = \frac{4(v_1 - v_0)}{g}.$$

⑤ 임계 조건 — 두 도착 시각이 같아지는 L 이 곧 $L_{\min}$ 이다. $t_{\text{㉑}} = t_{\text{㉒}}$ 에서

$$\frac{4(v_1 - v_0)}{g} = \frac{L}{v_0} \Rightarrow v_1 = v_0 + \frac{gL}{4v_0}.$$

양변을 제곱하고 $v_1^2 = v_0^2 + gL/\sqrt{3}$ 을 대입하면

$$v_0^2 + \frac{gL}{\sqrt{3}} = v_0^2 + \frac{gL}{2} + \frac{g^2 L^2}{16v_0^2} \Rightarrow gL \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{g^2 L^2}{16v_0^2}.$$

$L > 0$ 이므로 양변을 gL 로 나누면

$$L = 16 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) \frac{v_0^2}{g} = \frac{8(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}} \frac{v_0^2}{g}.$$

$$L_{\min} = \frac{8(2\sqrt{3}-3)}{3} \frac{v_0^2}{g} \approx 1.24 \frac{v_0^2}{g}$$

L 이 작을 때는 구조물 ㉔가 빠르다. 내리막에서 얻은 속력이 오르막에서 고스란히 되돌아가므로 ㉔의 이득은 “빨라진 만큼”뿐인데, ㉔의 경로 길이는 ㉔보다 $2/\sqrt{3} \approx 1.155$ 배 길어 손해도 함께 커지기 때문이다. L 이 커질수록 골짜기에서의 속력 $v_1 \approx \sqrt{gL/\sqrt{3}}$ 이 $\sqrt{L}$ 로 커져 시간 이득이 손해를 앞지르고, 그 경계가 위의 $L_{\min}$ 이다.

문제 2 전자기 — 복사압·평행판 대전·평행 도선의 자기력

광자 운동량 · 전하 재분배 · 충격량-운동량

$$(2-1) N = \frac{\lambda \tan \theta}{2h} \left(q \frac{V}{d} - Mg \right)$$

- ① **힘의 평형** — 금속공에 작용하는 힘은 네 가지이다. 위판이 $-$, 아래판이 $+$ 이므로 판 사이 전기장 $E = V/d$ 는 위쪽을 향하고, 전하 $+q$ 인 공은 위 방향으로 qV/d 의 전기력을 받는다. 중력 Mg 는 아래, 실은 아래쪽 판에 묶여 있으므로 장력 T 는 줄을 따라 아래쪽 고정점 방향으로 당긴다. 마지막으로 레이저의 복사력 F 가 수평으로 작용한다. 실이 연직과 각 θ 를 이루므로

$$\text{수평: } F = T \sin \theta, \quad \text{연직: } q \frac{V}{d} = Mg + T \cos \theta.$$

연직식에서 $T \cos \theta = qV/d - Mg$ 이고, 두 식을 나누어 T 를 소거하면

$$F = \left(q \frac{V}{d} - Mg \right) \tan \theta.$$

(실이 팽팽하게 당겨져 있으려면 $T > 0$, 즉 $qV/d > Mg$ 이어야 한다.)

- ② **복사력과 광자 수 잇기** — 광자 1개의 운동량은 h/λ 이고, 입사 방향과 정확히 반대 방향으로 같은 속력으로 튀어나오므로 운동량 변화는 $(-h/\lambda) - (+h/\lambda) = -2h/\lambda$ 이다. 운동량 보존에 의해 광자 1개가 공에 전달하는 운동량은 $2h/\lambda$ 이다. 단위 시간당 광자 수를 N 이라 하면 힘은 단위 시간당 전달되는 운동량이므로

$$F = N \cdot \frac{2h}{\lambda} \Rightarrow N = \frac{F\lambda}{2h}.$$

$$N = \frac{\lambda}{2h} \left(q \frac{V}{d} - Mg \right) \tan \theta$$

$\theta \rightarrow 0$ 이면 $N \rightarrow 0$ 으로, 빛을 쏘지 않을 때 실이 연직인 상황과 이어진다. 한편 필요한 레이저 출력은 $P = N \cdot (hc/\lambda) = (c/2)(qV/d - Mg) \tan \theta$ 로 **파장에 무관**하다. 즉 같은 기울기를 만드는 데 필요한 일률은 같고, 파장이 길수록 광자 하나의 운동량이 작아 더 많은 광자가 필요하다.

(2-2) (a) 각 구간은 등가속, 접촉할 때마다 가속도는 방향이 뒤집히고 크기는 0.81 배로 줄어든다. (b) 속력은 단조 증가하며 $v_{\infty} = 10v_1/\sqrt{19} \approx 2.29 v_1$ 로 수렴한다 (공은 멈추지 않는다).

- ① **사전실험의 의미** — 접촉한 평행판과 금속공은 전하를 9 : 1 로 나눠 가진다. 즉 접촉하는 순간 공은 (판 + 공) 전체 전하의 1/10 을 갖고, 판은 9/10 을 갖는다.

- ② **첫 접촉** — 아래판 $+10q$ 와 전하 없는 공이 닿으면 총 $+10q$ 가 나뉘어

$$Q_{\text{아래}} = +9q, \quad Q_{\text{공}} = +q, \quad Q_{\text{위}} = -10q.$$

- ③ **판 사이 전기장** — 넓은 평행판 하나가 만드는 균일 전기장의 크기는 $|Q|/(2\epsilon_0 A)$ 이고, 두 판 사이에서는 두 판의 기여가 같은 방향으로 더해지므로

$$E = \frac{|Q_{\text{아래}}| + |Q_{\text{위}}|}{2\epsilon_0 A} \equiv \frac{S}{2\epsilon_0 A}, \quad S \equiv |Q_{\text{아래}}| + |Q_{\text{위}}|,$$

방향은 $+$ 인 아래판에서 $-$ 인 위판 쪽, 즉 **위쪽**이다. 첫 비행에서 $S_1 = 9q + 10q = 19q$ 이다.

- ④ **첫 비행** — 공은 $+q$, 전기장은 위쪽이므로 힘은 위쪽이고 공은 위판으로 가속된다. 비행 중에는 어느 전하도 변하지 않으므로 전기장이 균일하고 **등가속 운동**이다.
- ⑤ **접촉마다 0.9 배** — 전체 전하는 항상 0 이므로, 접촉하는 판의 전하를 Q_p , 반대쪽 판의 전하를 Q_o , 공의 전하를 Q_s 라 하면 $Q_p + Q_s = -Q_o$ 이다. 접촉 후에는

$$Q_{p'} = \frac{9}{10}(Q_p + Q_s) = -0.9 Q_o, \quad Q_{s'} = \frac{1}{10}(Q_p + Q_s) = -0.1 Q_o$$

가 되어, 접촉 직후의 상태가 **반대쪽 판의 전하 Q_o 하나로 완전히 결정**된다. 그런데 다음 접촉에서는 지금의 $Q_{p'} = -0.9Q_o$ 가 새로운 “반대쪽 판”이 되므로, 접촉을 한 번 거칠 때마다

$$|Q_o| \rightarrow 0.9 |Q_o|, \quad S = 1.9 |Q_o| \rightarrow 0.9 S, \quad |Q_s| = 0.1 |Q_o| \rightarrow 0.9 |Q_s|$$

로 모두 0.9 배가 된다. 실제로 $S = 19q, 17.1q, 15.39q, \dots$ 이고 $|Q_{\text{공}}| = q, 0.9q, 0.81q, \dots$ 이다.

- ⑥ (a) **가속도** — n 번째 비행 구간에서 가속도의 크기는

$$a_n = \frac{|Q_{s,n}| E_n}{M} = \frac{|Q_{s,n}| S_n}{2\varepsilon_0 AM} \propto 0.9^{n-1} \times 0.9^{n-1} = 0.81^{n-1}, \quad \text{즉} \quad a_n = a_1(0.81)^{n-1}.$$

- 비행 중에는 전하가 변하지 않으므로 각 구간은 **크기가 일정한 등가속 운동**이다.
- 접촉할 때마다 공의 전하 **부호가 뒤집히므로** 전기력의 방향도 뒤집힌다. 그런데 탄성충돌로 공의 운동 방향도 함께 뒤집히므로, 전기력은 언제나 **되된 직후의 운동 방향과 같은 쪽**을 향한다. 감속 구간은 생기지 않는다.
- 가속도의 크기는 매 구간 0.81 배로 줄어 $n \rightarrow \infty$ 에서 0으로 수렴한다.

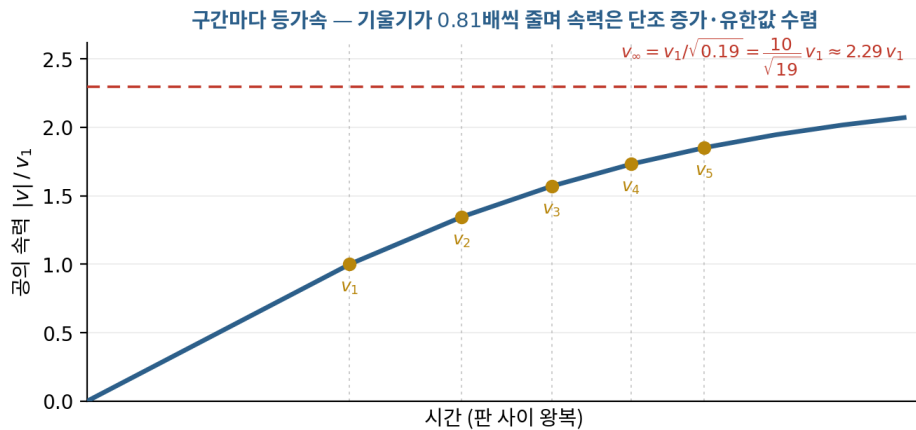
- ⑦ (b) **속도** — 간격 d 를 등가속으로 건널 때마다 $v_n^2 = v_{n-1}^2 + 2a_n d$ 이고 $v_0 = 0$ 이므로

$$v_n^2 = 2d \sum_{i=1}^n a_i = 2da_1 \frac{1 - 0.81^n}{1 - 0.81} = v_1^2 \frac{1 - 0.81^n}{0.19}, \quad v_1^2 = 2a_1 d.$$

$0 < 0.81 < 1$ 이므로 v_n 은 **단조 증가**하지만 발산하지 않고

$$v_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{v_1}{\sqrt{0.19}} = \frac{10}{\sqrt{19}} v_1 \approx 2.29 v_1$$

공은 결코 정지하지 않는다. 전하가 0.9^n 으로 줄어 전기장이 사라져 가지만, 그때까지 공이 얻는 운동 에너지는 유한한 값에 수렴한다. 충분히 여러 번 왕복한 뒤에는 전기력이 거의 없는 상태에서 거의 일정한 속력 v_∞ 로 두 판 사이를 계속 탄성 왕복한다. 이는 축전기에 저장되어 있던 정전기적 에너지의 일부가 공의 운동 에너지로 옮겨간 결과이다.



예시 작도 — 시간에 따른 공의 속력. 각 비행 구간은 등가속(직선)이고 접촉점에서 속력이 연속으로 이어진다. 기울기(가속도)가 매 구간 0.81 배로 줄면서 속력은 단조 증가하여 $v_\infty \approx 2.29 v_1$ 에 수렴한다.

$$(2-3) I_1 I_2 = \frac{Mg \tan \theta (d + 2L \sin \theta)}{kD}$$

두 막대의 전류가 서로 반대 방향이므로 두 막대는 서로 밀어내는 힘(척력)을 받아 바깥쪽으로 벌어지고, 그 상태에서 실이 연직과 각 θ 를 이루며 평형을 이룬다.

- ① **막대 하나의 힘 평형** — 막대 하나(질량 M)는 실 2개로 매달려 있고 두 실의 장력은 대칭성에 의해 같은 값 T 이다. 실이 연직과 θ 를 이루므로

$$\text{연직: } 2T \cos \theta = Mg, \quad \text{수평: } 2T \sin \theta = F.$$

두 식을 나누면 T 가 소거되어 막대가 받는 자기력은

$$F = Mg \tan \theta.$$

- ② **벌어진 뒤의 실제 간격** — 각 막대는 길이 L 인 실을 따라 회전하며 바깥으로 $L \sin \theta$ 만큼 이동한다. 두 막대가 서로 반대쪽으로 벌어지므로 최종 간격은

$$r = d + 2L \sin \theta.$$

토막글의 힘 공식에 넣을 거리는 처음 간격 d 가 아니라 **평형 상태에서의 간격 r** 임에 유의한다.

- ③ **토막글의 공식에 대입** — $F = kI_1 I_2 D / r$ 이므로

$$I_1 I_2 = \frac{Fr}{kD} = \frac{Mg \tan \theta (d + 2L \sin \theta)}{kD}.$$

$$I_1 I_2 = \frac{Mg(d + 2L \sin \theta) \tan \theta}{kD}$$

θ 가 매우 작을 때는 $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$ 이므로 $I_1 I_2 \approx Mg d \theta / (kD)$ 로, 벌어진 각이 두 전류의 곱에 거의 비례한다. 반대로 $\theta \rightarrow 90^\circ$ 이면 $\tan \theta \rightarrow \infty$ 로 필요한 전류가 급격히 커진다.

$$(2-4) y = \frac{(kI_1 D I_{3,\max} \Delta t)^2}{8d^2 M^2 g}$$

전류가 아주 짧은 시간만 흐르므로 “짧은 힘 $\rightarrow$ 충격량으로 속력을 얻고 $\rightarrow$ 진자처럼 올라가며 운동 에너지를 높이로 바꾼다”의 두 단계로 나누어 푼다.

- ① **막대 ㉠가 받는 힘** — Δt 동안 막대가 밀려난 거리를 무시할 수 있으므로 간격은 그대로 d 이다. 막대 ㉠가 ㉡의 위치에 만드는 자기장은 $B = kI_1 / d$ 이고, 길이 D 에 전류 $I_3(t)$ 가 흐르는 막대 ㉠가 받는 힘의 크기는

$$F(t) = BI_3(t)D = \frac{kI_1 D}{d} I_3(t).$$

- ② **충격량 = 삼각형 펄스의 넓이** — 충격량은 힘을 시간으로 적분한 값이고, I_1, d, D, k 는 상수이므로

$$J = \int_0^{\Delta t} F(t) dt = \frac{kI_1 D}{d} \int_0^{\Delta t} I_3(t) dt.$$

[그림 13]의 $I_3(t)$ 는 밑변 Δt , 높이 $I_{3,\max}$ 인 삼각형이므로 그 넓이는 $\int_0^{\Delta t} I_3 dt = \frac{1}{2} \Delta t I_{3,\max}$ 이다. 따라서

$$J = \frac{kI_1 D}{d} \cdot \frac{1}{2} \Delta t I_{3,\max} = \frac{kI_1 D I_{3,\max} \Delta t}{2d}.$$

- ③ **충격량 $\rightarrow$ 속력** — 충격량-운동량 정리에서 $Mv_0 - 0 = J$, 즉 $v_0 = J/M$ 의 수평 속력을 얻는다.

- ④ **속력 $\rightarrow$ 높이** — 전류가 끊긴 뒤 막대는 길이 L 인 실에 매달린 진자처럼 흔들려 올라간다. 마찰이 없으므로 역학적 에너지가 보존되고, 잠시 멈추는 순간에는 운동 에너지가 모두 중력 퍼텐셜 에너지로 바뀌므로

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = Mgy \Rightarrow y = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{J^2}{2M^2 g}.$$

$$y = \frac{1}{2M^2 g} \left(\frac{kI_1 D I_{3,\max} \Delta t}{2d} \right)^2 = \frac{(kI_1 D I_{3,\max} \Delta t)^2}{8d^2 M^2 g}$$

높이 y 는 충격량의 제곱, 즉 $(I_1 I_{3,\max} \Delta t)^2$ 에 비례하고 간격의 제곱 d^2 과 질량의 제곱 M^2 에 반비례한다. 또한 두 막대는 작용·반작용에 의해 크기가 같고 방향이 반대인 충격량을 주고받으므로, 막대 ㉡도 반대쪽으로 같은 높이 y 만큼 올라간다.