

서울대학교 면접·구술고사

자연계열 · 물리학

문제 · 예시답안

시험 구분
전형
문항 수
핵심 개념

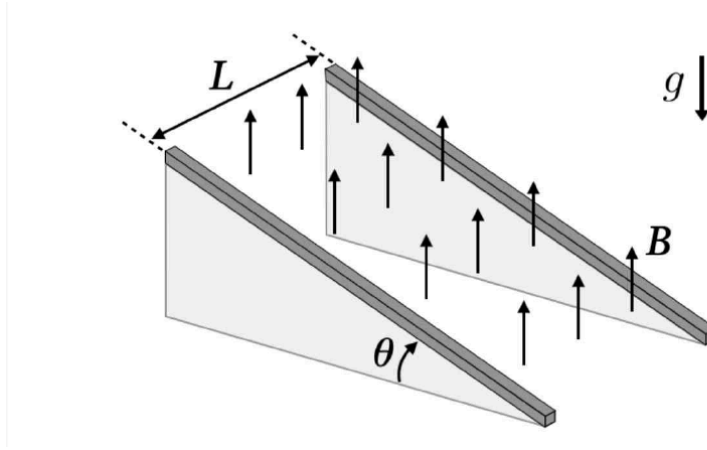
면접 및 구술고사 (자연계열, 물리학)
수시모집 일반전형
2문항 (소문항 8개)
자기장 속 전류 도선이 받는 힘, 전자기 유도와 종단속력,
LED 문턱전압과 광자 에너지, 회전 좌표계의 원심력,
용수철 진자의 단진동, 볼록 렌즈의 결상, 빔면 위 마찰 운동

I. 문제

문제 1 경사면 위 도선 — 전자기력, 전자기 유도, LED

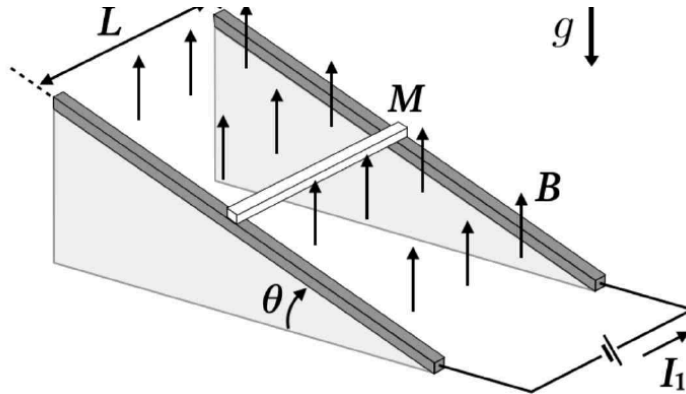
소문항 4개

아래 [그림 1-1]과 같이 서로 평행하고 가느다란 두 전도성 금속 레일이 지면에 대해 θ 의 각도로 기울어져 있다. 두 금속 레일 사이의 간격은 L 로 일정하며, 레일 사이의 공간에는 지면에서 수직으로 나오는 균일한 자기장 B 가 형성되어 있다. (단, 금속 레일이 설치된 절연체 빔면은 지면에 단단히 고정되어 움직이지 않는다. 중력가속도는 g 이다.)



[그림 1-1] 지면에서 수직으로 나오는 자기장 B 속에 놓인 경사각 θ 의 평행 레일

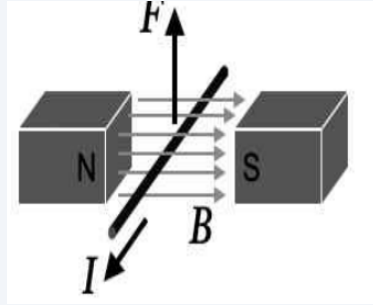
- (1-1) 앞에서 묘사한 두 금속 레일 위에, 질량이 M 이고 길이가 L 인 가느다란 전도성 금속 막대를 지면에 수평이 되도록 [그림 1-2]와 같이 놓고 고정장치로 고정해 두었다. 이제 금속 막대에 전원을 연결하여 전류 I_1 을 흐르게 하자, 고정장치를 풀어도 막대는 경사면에서 정지하여 있었다. 레일과 막대 사이의 마찰 등 모든 마찰력은 무시할 수 있다고 가정할 때, 전류 I_1 의 크기를 토막글 ①을 참고하여 주어진 다른 변수들로 표현하시오. (단, 금속 막대는 항상 양쪽 레일에 닿은 상태로 지면과 수평을 이룬 채 레일을 따라 위아래로 움직일 수 있다.)



[그림 1-2] 레일 위에 수평으로 놓인 금속 막대 (M, L) 와 전류 I_1

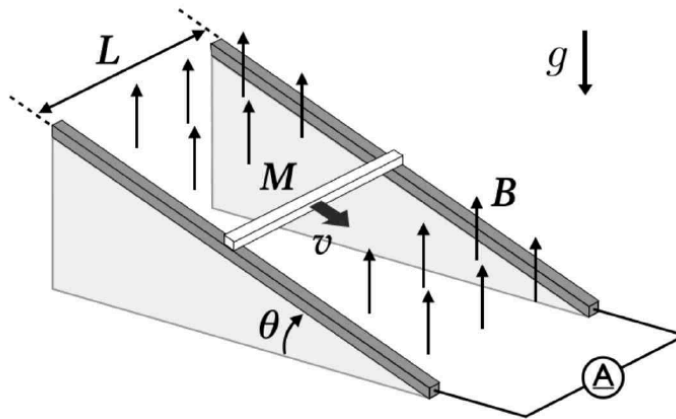
토막글 ① — 자기장 속 전류 도선이 받는 힘

[그림 1-3]은 전류 I 가 흐르는 길이 L 인 직선 도선을 크기가 B 로 균일한 자기장 속에 자기장의 방향과 수직이 되도록 놓았을 때, 이 도선이 받는 힘 F 의 방향을 나타낸 것이다. 이때 도선이 받는 힘의 크기는 $F = BIL$ 이다.



[그림 1-3] 도선이 받는 힘 F 의 방향

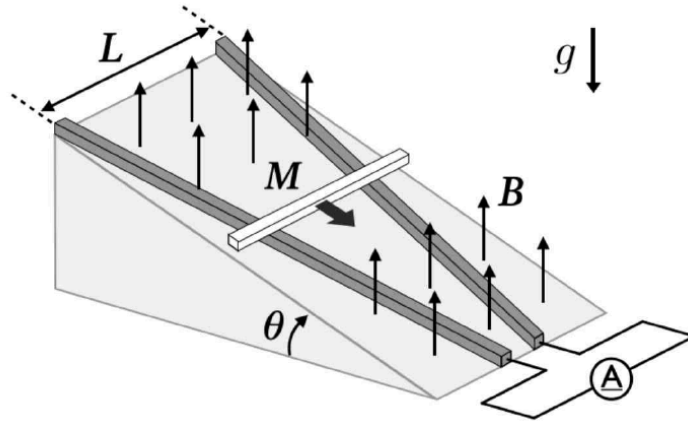
- (1-2) 이번에는 [그림 1-4]와 같이 [그림 1-2]의 실험기에서 전원을 분리하고 대신 전류계를 연결하였다. 금속 레일 위에 금속 막대를 지면과 수평이 되도록 올려놓은 뒤 막대를 레일을 따라 속력 v 로 내려보냈다. 이후 계속 하여 금속 막대는 일정한 속력 v 로 경사면을 내려갔으며, 전류계에서는 전류 I_2 가 측정되었다. (단, 금속 막대는 항상 양쪽 레일에 닿은 상태로 지면과 수평을 이룬 채 레일을 따라 움직인다. 금속 막대의 전기저항은 R 이며, 금속 레일을 비롯한 기타 도선의 전기저항은 무시할 수 있다. 또한 레일과 막대 사이의 마찰 등 모든 마찰력은 무시한다.)



[그림 1-4] 전원을 떼어내고 전류계를 연결한 회로

- (1) v 와 I_2 를 M 이 포함된 문자식으로 각각 표현하시오.
- (2) 문제 (1)에서 구한 전류 I_2 의 크기를 앞선 [문제 1-1]에서 얻은 전류 I_1 의 크기와 비교하고 그 물리적 의미를 설명하시오.
- (3) 금속 막대에 작용한 중력이 한 일의 일률 P_1 과 금속 막대에서 소모되는 전력 P_2 를 M 이 포함된 문자식으로 각각 표현하시오.

- (1-3) 앞선 [문제 1-2]에서 살펴본 실험기기의 금속 레일을 [그림 1-5]와 같이 변형하여, 경사면 상단에서는 두 레일 사이의 간격이 여전히 L 이지만 경사면 하단에서는 그 간격이 L 보다 작게 되도록 만들었다. 이렇게 변형된 금속 레일 위에서도 적절한 속력으로 금속 막대를 내려보낸다면 [문제 1-2]에서와 같이 막대가 경사면을 따라 일정한 속력으로 내려갈 수 있을지 정성적으로 설명하시오. (단, 금속 막대는 항상 양쪽 레일에 닿은 상태로 지면과 수평을 이룬 채 레일을 따라 위아래로 움직일 수 있다. 또한, 레일의 길이는 충분히 길다고 가정한다.)

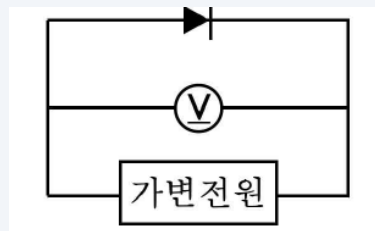


[그림 1-5] 하단으로 갈수록 간격이 좁아지는 레일

토막글 ② — 발광 다이오드(LED)의 특성

다이오드에 순방향 전압을 걸어주면 n형 반도체에 있던 전자들이 p형 반도체 쪽으로 이동하여 p-n 접합면 근처에서 양공과 결합한다. 이때 전자와 양공이 결합하여 회로에 충분한 전류가 흐르려면, 최소한 다이오드의 고유한 에너지 간격, 이른바 띠 간격 에너지 (E_g) 에 해당하는 전압이 다이오드 양단에 주어져야 한다. 특히 발광 다이오드에서는 이렇게 전류가 흐르는 동안 단색광을 방출하는데, 이 단색광의 파장은 전자가 양공과 결합하며 내놓는 띠 간격 에너지 (E_g) 에 따라 결정된다.

이와 같은 발광 다이오드의 특성을 이용하면, 간단한 실험을 통해 플랑크 상수를 측정해 볼 수 있다. [그림 1-6]과 같이 단색 발광 다이오드를 가변전원과 전압계에 연결한 후, 전압을 서서히 올리면서 다이오드가 빛을 방출하기 시작하는 순간의 전압을 측정한다. 이 전압은 다이오드가 내는 빛의 진동수에 비례하며, 그 비례상수는 플랑크 상수와 연관된다. 따라서 여러 색깔의 발광 다이오드를 이용하여 실험을 반복하면 상당히 정확하게 플랑크 상수를 측정할 수 있다.



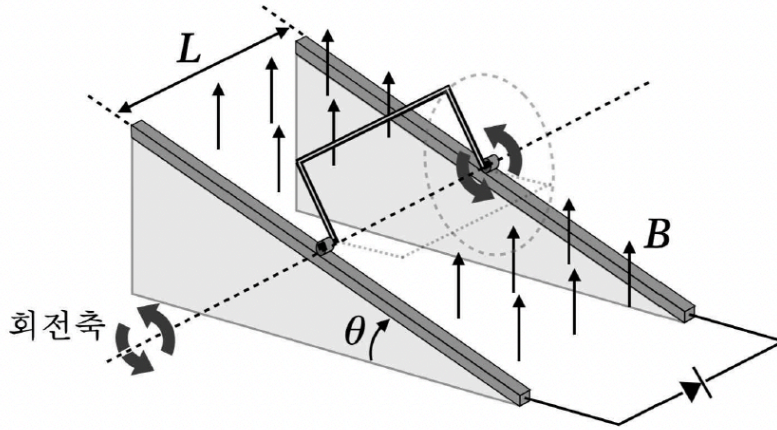
[그림 1-6] LED · 가변전원 · 전압계 회로

토막글 ③ — 삼각함수의 순간 변화율

함수 f 가 시간에 따라 주기적으로 변한다면 이 함수의 시간에 따른 순간 변화율도 같은 주기로 변화한다. 이때 함수 f 가 삼각함수라면 이 함수의 시간에 따른 순간 변화율 역시 f 와 같은 주기의 삼각함수 형태를 가진다.

- (1-4) 이제 [그림 1-7]과 같이 [문제 1-2]에서 살펴본 실험기기에서 전류계를 분리하고, 파란색 발광 다이오드를 연결하였다. 또한 레일 위의 금속 막대를 제거하고, 대신 [그림 1-7]과 같이 너비가 L 인 가느다란 π 자형 도선을 연결하였다. 이 π 자형 도선은 그림에 표시된 회전축을 중심으로 회전할 수 있다. (단, π 자형 도선은 항상 자기장 속에서 회전하며, 도선의 양 끝단은 회전하는 동안 금속 레일에 항상 닿아 있다.)

이 π 자형 도선을 일정한 각속도로 회전시키자 파란색 발광 다이오드는 4초 동안 발광 후 20초 동안 꺼짐을 반복하였다(즉, 주기는 24초). 만약 초록색 발광 다이오드로 바꾼 후 π 자형 도선을 동일한 각속도로 회전시켰다면, 이 경우 다이오드가 매 24초마다 빛을 방출하는 시간은 몇 초인지 토막글 ②와 토막글 ③을 참고하여 답하시오. (단, 발광 다이오드의 내부 저항은 무시할 수 있으며, 발광 다이오드가 내는 빛의 규격 파장은 다음과 같다고 가정한다: 파란색 = $320\sqrt{2}$ nm, 초록색 = $320\sqrt{3}$ nm.)

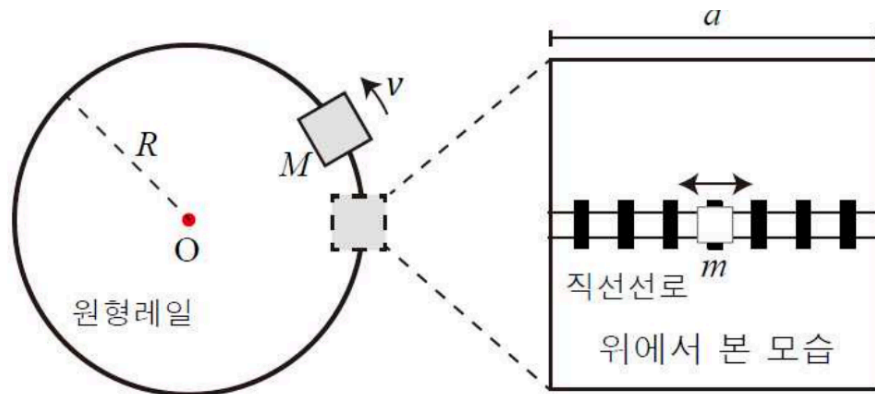


[그림 1-7] 회전축을 중심으로 회전하는 π 자형 도선

문제 2 회전하는 수레 — 원심력, 단진동, 볼록 렌즈, 빛면 마찰

소문항 4개

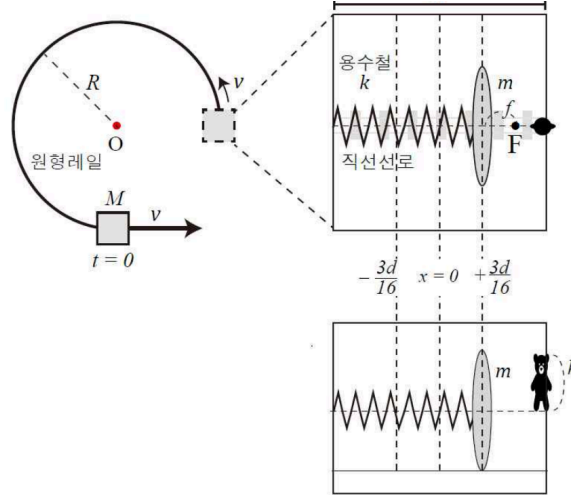
아래 [그림 2-1]과 같이 길이와 너비가 d 인 수레가 반지름이 R 인 마찰이 없는 원형레일을 따라 속력 v 로 등속 원운동을 한다. 수레 내부 바닥에는 [그림 2-1]의 오른쪽과 같이 원형레일과 항상 수직 방향인 직선선로가 있고, 질량이 m 이고 크기를 무시할 수 있는 물체가 직선선로의 중앙에 고정되어 있다. 수레와 내부 물체의 총질량은 M 이다. (단, M 은 m 에 비해 매우 크고, R 은 d 에 비해 매우 크다.)



[그림 2-1] 원형레일 위의 수레와 원형레일에 수직인 내부 직선선로

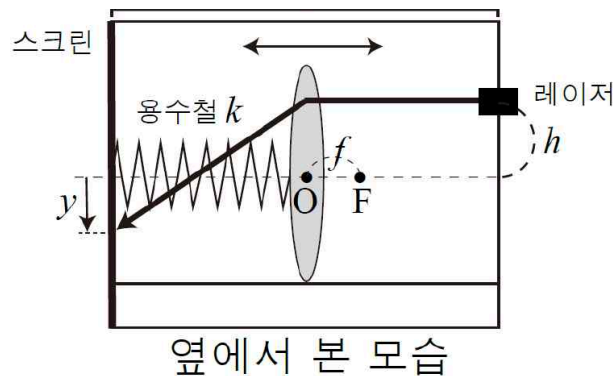
- (2-1) 아래 [그림 2-1]의 원형레일을 무중력 공간에 설치하였다. 고정되어 있던 물체가 어느 순간 고정이 풀리면서 마찰이 없는 직선선로를 따라 움직이기 시작하였다. 물체가 수레 벽에 닿는 경우 탄성충돌 한다고 가정할 때, 수레가 한 바퀴 도는 동안 물체가 수레 벽과 충돌하는 횟수를 구하시오. (단, $R = 10000/\pi^2 \cdot d$ 이고, 수레 벽과 물체가 충돌을 하여도 수레는 영향을 받지 않고 등속 원운동을 지속한다고 가정한다.)

- (2-2) 앞서 살펴본 [그림 2-1]의 물체 대신 [그림 2-2]와 같이 질량이 m 이고, 초점거리 $f = d/8$ 인 얇은 볼록렌즈를 직선선로 중앙($x = 0$)에 설치하였다. 렌즈는 원형레일의 중심에 가까운 쪽의 수레 벽과 용수철로 연결되어 있으며, 마찰이 없는 직선선로를 따라서 움직일 수 있다. 용수철이 변형되지 않았을 때의 길이는 $d/2$ 이고, 용수철 상수는 k 이다. 맞은편 수레 벽에는 크기가 h 이고 질량과 두께를 무시할 수 있는 곰 인형이 [그림 2-2]와 같이 고정되어 있었다. 수레가 등속 원운동을 하는 동안, 수레 내부의 관찰자가 보기에 렌즈는 $x = +3d/16$ 에서 정지해 있었다. 수레는 $t = 0$ 인 순간, 원형레일을 탈출하여 원형레일의 접선 방향으로 등속 직선 운동을 하기 시작했다. 이때 다음 물음에 답하시오. (단, 용수철의 질량은 무시할 수 있으며, 용수철과 직선선로는 상의 위치에 영향을 주지 않고, 렌즈의 운동은 수레의 등속 원운동에 영향을 주지 않는다. 수레 내부는 충분히 밝다.)



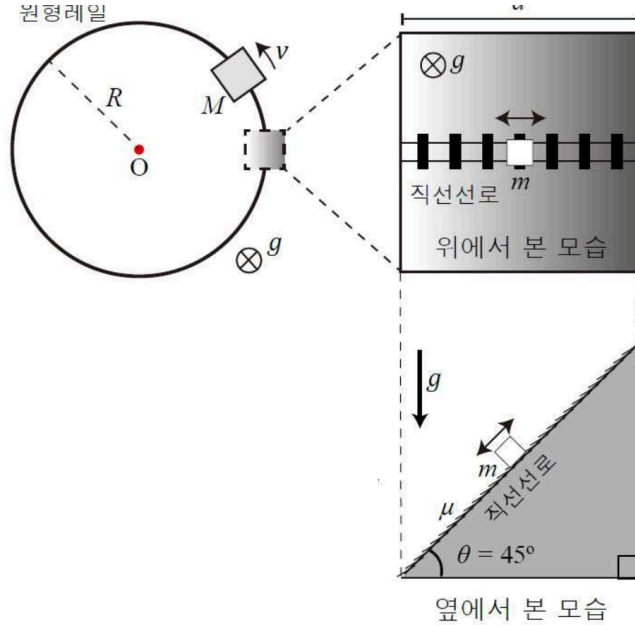
[그림 2-2] 용수철로 연결된 볼록렌즈와 맞은편 수레 벽에 고정된 곰 인형

- (1) 용수철 상수 k 를 m, v, d, R 로 나타내시오.
- (2) 렌즈가 곰 인형과 가장 멀 때 생기는 곰 인형의 상의 위치 x_{far} 과 가장 가까울 때 생기는 곰 인형의 상의 위치 x_{near} 을 구하시오. 또한, 이때 각각의 상의 배율을 구하고 상의 종류를 설명하시오. (단, 앞선 [그림 2-2]에 표시된 $x = 0$ 을 기준으로 하여 좌표를 구하시오.)
- (3) 이번에는 곰 인형 대신 [그림 2-3]과 같이 렌즈의 광축($y = 0$)으로부터 높이 h 에 레이저를 설치하였다. 레이저 빛은 렌즈의 광축과 평행하게 렌즈에 입사한다. 용수철이 매달린 벽에는 스크린이 설치되어 있어, 렌즈를 통과한 레이저 빛이 스크린에 맺힌다. 스크린에 맺힌 레이저 빛이 광축으로부터 떨어진 거리를 y 라 할 때, y 의 범위를 구하시오.



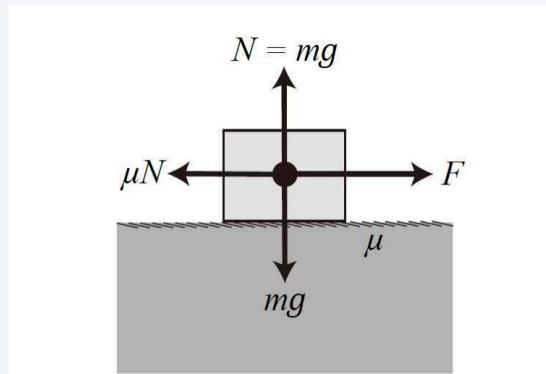
[그림 2-3] 광축과 나란히 입사하는 레이저와 용수철이 매달린 벽의 스크린

- (2-3) 아래 [그림 2-4]와 같이, 앞서 살펴본 [그림 2-1]의 원형레일을 중력장 안에 놓았다. (중력은 [그림 2-4]와 같이 원형레일을 포함한 평면에 수직인 방향으로 작용하며, 중력가속도는 g 이다.) 또한, 바닥이 평평한 수레 대신 원형레일 안쪽으로 기울어진 경사면을 가진 수레로 바꾸었으며(경사각 $\theta = 45^\circ$), 이 수레는 원형레일을 일정한 속력 v 로 돌고 있었다. 수레 내부의 경사면에는 마찰이 있는 직선선로가 설치되어 있어, 질량 m 인 물체가 직선선로를 따라 이동할 수 있다. 직선선로 중앙에 고정되어 있던 물체가 $t = 0$ 인 순간 고정이 풀리면서 직선선로 위에서 움직이기 시작하였다. 이 순간 수레 내부 관찰자가 측정한 물체의 가속도의 크기와 방향을 각각 구하시오. (단, $R = v^2/(4g)$ 이며, 물체의 운동은 수레의 등속 원운동에 영향을 주지 않는다. 물체와 직선선로 사이의 운동마찰계수 $\mu = 1/5$ 이며, 토막글 ④를 참고하시오.)



[그림 2-4] 중력장 속, 원형레일 안쪽으로 기울어진 경사면($\theta = 45^\circ$)을 가진 수레

토막글 ④ — 수직 항력과 운동마찰력



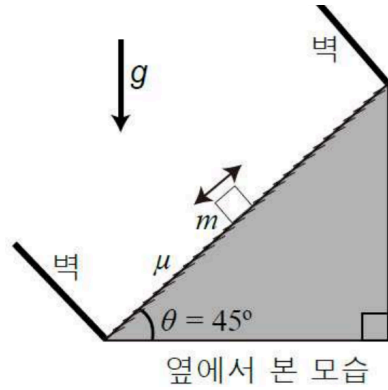
[그림 2-5] 움직이는 물체에 작용하는 힘

위 그림은 크기를 무시할 수 있는 물체가 수평면 위에서 운동하는 동안 물체에 작용하는 힘을 모두 나타낸 것이다. 움직이는 물체에 작용하는 힘은 외력 F , 수직 항력 N , 중력 mg , 운동마찰력 μN 이다.

수직 항력은 물체가 접촉하고 있는 면이 물체를 접촉면에 수직인 방향으로 밀어내는 힘이다. 물체가 지면을 뚫고 이동하지 않는 이유는 지면이 중력과 같은 크기의 수직 항력으로 물체를 떠받치고 있기 때문이다.

운동마찰력은 물체가 움직이는 동안 물체가 움직이는 반대 방향으로 작용하여 물체의 운동을 방해하는 마찰력을 말한다. 운동마찰력은 수직 항력 N 에 비례하며, 그 비례상수는 운동마찰계수 μ 이다.

- (2-4) 이제 [그림 2-6]과 같이 [문제 2-3]의 경사면 양 끝에 벽을 세웠다. 직선선로 중앙에 고정되어 있던 물체가, 시간 $t = 0$ 인 순간 고정이 풀리면서 직선선로를 따라 움직일 수 있게 되었다. 물체가 벽에 닿는 경우 탄성충돌한다고 가정할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 물체와 벽의 충돌은 수레의 등속 원운동에 영향을 주지 않는다.)



[그림 2-6] 경사면 양 끝에 벽을 세운 모습

- (1) 물체의 속도-시간 그래프를 개략적으로 그리고 설명하시오.
- (2) 물체가 벽에 다섯 번 충돌할 때까지의 총 이동 거리는 d 의 몇 배인지 구하시오.

II. 예시답안

문제 1 경사면 위 도선 — 전자기력, 전자기 유도, LED

전자기력 · 전자기 유도 · 광자 에너지

(1-1) $I_1 = Mg \tan \theta / (BL)$

이 문제의 출발점은 자기장이 **빗면에 수직이 아니라 연직 위 방향**이라는 점이다. 막대는 지면과 수평이므로 막대의 방향 $\vec{L}$ 과 자기장 $\vec{B}$ 는 서로 수직이고, 도선이 받는 힘의 크기는 토막글 ①에 따라

$$F = BI_1 L$$

이다. 그 방향은 $\vec{L}$ 과 $\vec{B}$ 에 모두 수직, 즉 **수평면 안에서 막대에 수직한 방향**이며 빗면을 향해 밀어 올리는 쪽이다. 이 수평한 힘을 빗면 방향과 빗면에 수직인 방향으로 분해하면, 빗면을 따라 위로 향하는 성분은 $F \cos \theta$ 이다. 한편 중력 Mg 의 빗면 방향 성분은 아래쪽으로 $Mg \sin \theta$ 이다. (수직 항력은 빗면에 수직이므로 빗면 방향 평형식에 들어오지 않는다.)

막대가 정지해 있으려면 빗면 방향 알짜힘이 0이어야 하므로

$$BI_1 L \cos \theta = Mg \sin \theta$$

이고, 이를 I_1 에 대해 풀면

$$I_1 = \frac{Mg \sin \theta}{BL \cos \theta} = \frac{Mg \tan \theta}{BL}$$

$\theta \rightarrow 0$ 이면 $I_1 \rightarrow 0$ 으로, 빗면이 평평해질수록 붙잡아 둘 전류가 필요 없다. 반대로 $\theta \rightarrow 90^\circ$ 이면 $\cos \theta \rightarrow 0$ 이 되어 전자기력의 빗면 성분이 사라지므로 $I_1 \rightarrow \infty$ 가 된다. 자기장이 빗면에 수직인 흔한 설정이라면 $\cos \theta$ 인자가 없어 $I_1 = Mg \sin \theta / (BL)$ 이 되지만, 여기서는 자기장이 연직이므로 $\cos \theta$ 가 반드시 들어간다.

$$(1-2)(1) v = \frac{MgR \sin \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta}, \quad I_2 = \frac{Mg \tan \theta}{BL}$$

① **유도 기전력.** 회로가 둘러싸는 넓이 중 연직 자기장을 실제로 가로지르는 것은 그 넓이의 **수평면 투영**이다. 막대가 빗면을 따라 시간 Δt 동안 거리 $v\Delta t$ 만큼 내려가면 수평 방향으로 $v\Delta t \cos \theta$ 만큼 이동하므로, 자기 선속을 만드는 유효 넓이의 변화는 $\Delta \Phi = BL(v\Delta t) \cos \theta$ 이다. 따라서 패러데이 법칙에 의해

$$|\varepsilon| = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = BLv \cos \theta, \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLv \cos \theta}{R}.$$

② **제동력.** 이 유도전류가 흐르는 막대는 다시 연직 자기장 속에서 힘 $BI_2 L$ 을 받는다. (1-1)과 같은 이유로 이 힘은 수평이고, 빗면 방향 성분은 $BI_2 L \cos \theta$ 이며 렌츠 법칙에 따라 운동을 방해하는 쪽, 즉 빗면 위쪽을 향한다.

③ **종단속력 조건.** 속력이 일정하다는 것은 가속도가 0, 즉 빗면 방향 알짜힘이 0이라는 뜻이므로

$$Mg \sin \theta = BI_2 L \cos \theta = \frac{B^2 L^2 v \cos^2 \theta}{R}.$$

v 에 대해 풀고, 그 결과를 I_2 식에 되돌려 넣으면

$$v = \frac{MgR \sin \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta}, \quad I_2 = \frac{BL \cos \theta}{R} \cdot \frac{MgR \sin \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta} = \frac{Mg \tan \theta}{BL}$$

저항 R 가 클수록, 자기장이나 레일 간격이 작을수록 제동이 약해 종단속력이 커진다.

(1-2)(2) $I_2 = I_1$ — 두 전류의 크기는 정확히 같다

(1-1)과 (1-2)에서 얻은 두 값을 나란히 놓으면

$$I_1 = \frac{Mg \tan \theta}{BL} = I_2.$$

두 상황은 겉보기에 다르지만(하나는 외부 전원, 다른 하나는 유도전류) 막대에 대한 **빗면 방향 힘의 평형식이 완전히 같다.**

- 1-1: 정지 상태 — 가속도 0 $\rightarrow BI_1 L \cos \theta = Mg \sin \theta$.
- 1-2: 등속 상태 — 가속도 0 $\rightarrow BI_2 L \cos \theta = Mg \sin \theta$.

즉 “가속도가 0”이라는 조건이 같으므로 필요한 전자기력이 같고, 따라서 전류도 같아야 한다. 전류가 전원에서 공급된 운동에 의해 유도된 자기력의 크기를 결정하는 것은 전류뿐이기 때문이다. 이는 관성계에서 정지와 등속 직선 운동이 물리적으로 구별되지 않는다는 사실의 구체적인 예이기도 하다.

$$(1-2)(3) P_1 = P_2 = \frac{M^2 g^2 R \sin^2 \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta} = \frac{M^2 g^2 R \tan^2 \theta}{B^2 L^2}$$

여기서 P_1 은 금속 막대에 작용한 중력이 한 일의 일률이고, P_2 는 금속 막대에서 소모되는 전력이다.

중력이 하는 일의 일률은 (중력의 운동 방향 성분) $\times$ (속력)이다. 속도는 빗면 아래 방향이고 그 방향의 중력 성분은 $Mg \sin \theta$ 이므로

$$P_1 = (Mg \sin \theta)v = Mg \sin \theta \cdot \frac{MgR \sin \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta} = \frac{M^2 g^2 R \sin^2 \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta}.$$

한편 회로에서 저항을 가진 것은 막대뿐이므로 소모 전력은

$$P_2 = I_2^2 R = \left(\frac{Mg \tan \theta}{BL} \right)^2 R = \frac{M^2 g^2 R \tan^2 \theta}{B^2 L^2} = \frac{M^2 g^2 R \sin^2 \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta}.$$

$$P_1 = P_2 = \frac{M^2 g^2 R \tan^2 \theta}{B^2 L^2}$$

두 값이 같은 것은 우연이 아니라 에너지 보존의 직접적인 결과이다. 종단속력에서는 속력이 일정해 운동 에너지가 변하지 않으므로, 중력이 공급한 에너지가 남김없이 저항에서 열로 바뀐다. 만약 $P_1 > P_2$ 이면 남는 에너지가 운동 에너지를 키워 속력이 계속 빨라졌을 것이다.

(1-3) 일정한 속력으로 내려갈 수 없다 — 막대는 계속 가속된다

레일 간격이 L 로 일정하지 않고 아래로 갈수록 좁아지므로, 막대가 지금 있는 위치에서 두 레일에 닿는 부분의 길이(유효 길이)를 ℓ 이라 하면 ℓ 은 내려갈수록 점점 작아진다. (1-2)의 유도를 그대로 $L \rightarrow \ell$ 로 바꾸면

$$\varepsilon = B\ell v \cos \theta, \quad I = \frac{B\ell v \cos \theta}{R}, \quad F_{\text{제동}} = BI\ell \cos \theta = \frac{B^2 \ell^2 v \cos^2 \theta}{R}$$

이다. 즉 제동력은 유효 길이의 제곱에 비례한다. 반면 막대를 끌어내리는 중력의 빗면 성분 $Mg \sin \theta$ 는 위치와 무관하게 일정하다.

어떤 위치에서 등속이 되려면 $Mg \sin \theta = B^2 \ell^2 v \cos^2 \theta / R$, 즉

$$v_{\text{등속}}(\ell) = \frac{MgR \sin \theta}{B^2 \ell^2 \cos^2 \theta} \propto \frac{1}{\ell^2}$$

를 만족해야 한다. 그런데 ℓ 이 줄어들면 이 “필요 속력”은 $1/\ell^2$ 로 급격히 커진다. 어느 한 지점에서 온 종게 $v = v_{\text{등속}}(\ell)$ 이 맞았다고 해도, 막대가 조금 더 내려가는 순간 ℓ 이 작아져 $v_{\text{등속}}$ 은 커지고 실제 속력 v 는 아직 그만큼 커지지 못했으므로 $v < v_{\text{등속}}$ 이 된다. 그러면

$$Mg \sin \theta > \frac{B^2 \ell^2 v \cos^2 \theta}{R}$$

가 되어 알짜힘이 빗면 아래쪽으로 남고 막대는 가속된다. 가속되어 v 가 커지면 제동력도 커지지만, 그 사이 ℓ 은 또 줄어들어 필요 속력이 다시 달아난다. 제동력이 ℓ^2 에는 제곱으로, v 에는 일차로만 의존하기 때문에 속력의 증가가 유효 길이의 감소를 끝내 따라잡지 못한다.

유효 길이 ℓ 이 계속 줄어드는 한 종단속력 조건 $v_{\text{등속}} \propto 1/\ell^2$ 도 계속 커지므로, 막대는 어떤 속력에서도 힘의 평형에 도달하지 못하고 **끝까지 가속된다**.

(반대로 아래로 갈수록 간격이 **넓어지는** 레일이라면 ℓ 이 커져 필요 속력이 작아지므로, 막대는 감속하다가 순간순간의 종단속력을 따라가며 점차 느려질 것이다.)

(1-4) 초록색 LED는 한 주기에 6 초 동안 켜진다

① **기전력의 형태**. C자형 도선이 일정한 각속도 ω 로 회전하면 이 고리를 지나는 자기 선속은 회전각의 삼각함수로 주기적으로 변한다. 토막글 ③에 따라 그 순간 변화율인 유도 기전력도 같은 주기의 삼각함수이므로

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \text{ rad/s}$$

로 놓을 수 있다. LED는 정류 작용을 하므로 순방향 반주기에서만, 그것도 순간 전압이 문턱전압 V 를 넘는 동안에만 전류가 흘러 빛을 낸다.

② **켜져 있는 시간과 문턱전압의 관계**. $\varepsilon_0 \sin \omega t > V$ 인 구간은

$$\omega t \in \left(\arcsin\left(\frac{V}{\varepsilon_0}\right), \pi - \arcsin\left(\frac{V}{\varepsilon_0}\right) \right)$$

이므로 켜져 있는 위상폭은 $\Delta\varphi = \pi - 2 \arcsin(V/\varepsilon_0)$ 이고, 켜져 있는 시간은 $t_{\text{on}} = \Delta\varphi/\omega$ 이다. 문턱전압이 낮을수록 $\arcsin$ 값이 작아져 더 오래 켜진다.

③ **파란색 LED로 진폭 결정.** $t_{\text{on}} = 4$ 초이므로 $\Delta\varphi = \omega \cdot 4 = (\pi/12)(4) = \pi/3$. 따라서

$$\pi - 2 \arcsin\left(\frac{V_{\text{파랑}}}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arcsin\left(\frac{V_{\text{파랑}}}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{V_{\text{파랑}}}{\varepsilon_0} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

④ **초록색 LED의 문턱전압.** 토막글 ②에서 문턱전압은 띠 간격 에너지에 대응하므로 $eV = E_g = hc/\lambda$, 즉 $V \propto 1/\lambda$ 이다. 따라서

$$\frac{V_{\text{초록}}}{V_{\text{파랑}}} = \frac{\lambda_{\text{파랑}}}{\lambda_{\text{초록}}} = \frac{320\sqrt{2}}{320\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \frac{V_{\text{초록}}}{\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

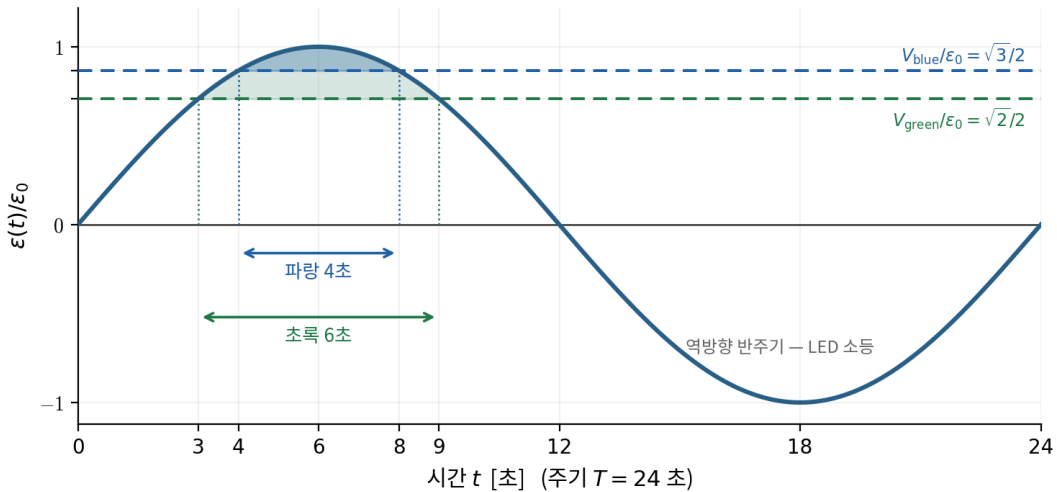
⑤ **초록색 LED의 켜짐 시간.** $\arcsin(1/\sqrt{2}) = \pi/4$ 이므로

$$\Delta\varphi_{\text{초록}} = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad t_{\text{초록}} = \frac{\Delta\varphi_{\text{초록}}}{\omega} = \frac{\pi/2}{\pi/12} = 6.$$

$$t_{\text{초록}} = 6 \text{ 초}$$

초록빛의 파장이 파란빛보다 길므로 ($320\sqrt{3} > 320\sqrt{2}$) 광자 하나의 에너지가 작고, 따라서 문턱전압도 낮다. 문턱이 낮으면 사인파가 그 값을 넘어서 있는 구간이 넓어지므로 더 오래 켜진다 — 실제로 6 초 > 4 초로 직관과 일치한다.

$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$ 와 두 LED의 문턱전압 — 문턱이 낮을수록 켜지는 구간이 넓다



예시 작도 — 기전력 $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$ 와 두 LED의 문턱전압. 파란색은 $\sqrt{3}/2 \varepsilon_0$ 를 넘는 4 초, 초록색은 $\sqrt{2}/2 \varepsilon_0$ 를 넘는 6 초 동안 켜진다.

문제 2 회전하는 수레 — 원심력, 단진동, 볼록 렌즈, 빔면 마찰

원심력 · 단진동 · 렌즈 결상 · 마찰

(2-1) 수레가 한 바퀴 도는 동안 충돌 횟수 $N = \pi\sqrt{R/d} = 100$ 회

① **회전 좌표계와 유효 중력.** 수레와 함께 도는 관찰자가 보면 물체에는 바깥쪽으로 원심력 mv^2/R 가 작용한다. $R \gg d$ 이므로 선로 위 어디에서나 v^2/R 는 사실상 같고, 물체는 선로에 구속되어 반지름 방향으로만 움직인다. 따라서 이 상황은 크기가 일정하고 바깥을 향하는 균일한 중력장

$$g_{\text{eff}} = \frac{v^2}{R}$$

속에서의 자유 낙하와 완전히 같다.

② **운동의 반복 구조.** 물체는 선로 중앙에서 정지 상태로 출발해 바깥 벽까지 거리 $d/2$ 를 등가속도로 “낙하”한다. 벽과 탄성충돌하고 $M \gg m$ 이므로 속력은 그대로 유지된 채 방향만 뒤집히며, 안쪽으로 되돌아가는 동안 같은 크기의 감속을 받아 정확히 출발점(중앙)에서 순간 정지한 뒤 다시 바깥으로 향한다. 즉 충돌은 항상 바깥 벽에서만 일어나고 운동은 주기적으로 되풀이된다.

③ 시간 계산. 중앙에서 바깥 벽까지 걸리는 시간 t_0 는

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2} g_{\text{eff}} t_0^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{R} t_0^2 \Rightarrow t_0 = \frac{\sqrt{(dR)}}{v}.$$

한 번의 왕복(바깥 벽 → 중앙 → 바깥 벽)에 걸리는 시간은 $2t_0$ 이고 그동안 충돌은 1회 일어난다. 수레가 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간은 $T = 2\pi R/v$ 이므로

$$N = \frac{T}{2t_0} = \frac{2\pi R/v}{2\sqrt{dR}/v} = \pi\sqrt{\frac{R}{d}}.$$

④ 수치 대입. $R = (10000/\pi^2)d$ 이므로 $\sqrt{R/d} = 100/\pi$ 이고

$$N = \pi\sqrt{\frac{R}{d}} = \pi \cdot \frac{100}{\pi} = 100 \text{ (회)}$$

실제로 충돌은 $t = t_0, 3t_0, 5t_0, \dots$ 에 일어나고 $T = 200t_0$ 이므로, $(2n-1)t_0 \leq 200t_0$ 를 만족하는 정수는 $n = 1, 2, \dots, 100$ 으로 정확히 100 회이다.

(2-2)(1) $k = \frac{16mv^2}{3dR}$

용수철은 안쪽 벽 $x = -d/2$ 에 고정되어 있고 자연 길이가 $d/2$ 이므로, 아무 힘도 받지 않을 때 용수철의 끝(렌즈의 위치)은 $x = 0$ 에 온다. 즉 변형량은 렌즈의 x 좌표 그 자체이다.

수레가 등속 원운동을 하는 동안 회전 좌표계에서 렌즈에 작용하는 힘은 바깥쪽 원심력 mv^2/R 와 안쪽으로 당기는 용수철의 복원력 kx 뿐이며, 렌즈가 $x = 3d/16$ 에 정지해 있으므로 두 힘이 평형을 이룬다.

$$k \cdot \frac{3d}{16} = \frac{mv^2}{R}$$

$$k = \frac{16}{3d} \cdot \frac{mv^2}{R} = \frac{16mv^2}{3dR}$$

(2-2)(2) $x_{\text{far}} = -49d/144$ (배율 $-2/9$), $x_{\text{near}} = -d/48$ (배율 $-2/3$) — 둘 다 도립 축소 실상

① 렌즈의 단진동. $t = 0$ 에 수레가 원형레일을 벗어나 등속 직선 운동을 하면 원심력이 사라지고 용수철의 복원력만 남는다. 따라서 렌즈는 자연 길이 위치 $x = 0$ 을 중심으로 단진동한다. $t = 0$ 에 $x = 3d/16$ 에서 정지해 있었으므로 그 점이 진동의 끝점이고

$$A = \frac{3d}{16}, \quad x_{\text{렌즈}} \in \left[-\frac{3d}{16}, +\frac{3d}{16} \right].$$

② 두 극단에서의 물체 거리. 곰 인형(물체)은 $x = +d/2$ 에 고정되어 있으므로

- 가장 멀 때: 렌즈가 $x = -3d/16 \rightarrow s_o = d/2 + 3d/16 = 11d/16$
- 가장 가까울 때: 렌즈가 $x = +3d/16 \rightarrow s_o = d/2 - 3d/16 = 5d/16$

③ 얇은 렌즈 공식. $1/s_o + 1/s_i = 1/f$ 에 $f = d/8$ 을 넣는다.

$$\text{가장 멀 때: } \frac{1}{s_i} = \frac{8}{d} - \frac{16}{11d} = \frac{88-16}{11d} = \frac{72}{11d} \Rightarrow s_i = \frac{11d}{72},$$

$$\text{가장 가까울 때: } \frac{1}{s_i} = \frac{8}{d} - \frac{16}{5d} = \frac{40-16}{5d} = \frac{24}{5d} \Rightarrow s_i = \frac{5d}{24}.$$

④ 상의 위치와 배율. 상은 렌즈를 기준으로 물체의 반대쪽(안쪽, $-x$ 방향)에 s_i 만큼 떨어진 곳에 맺히므로 $x_{\text{상}} = x_{\text{렌즈}} - s_i$ 이고, 배율은 $M = -s_i/s_o$ 이다.

$$x_{\text{far}} = -\frac{3d}{16} - \frac{11d}{72} = \frac{-27d-22d}{144} = -\frac{49d}{144}, \quad M_{\text{far}} = -\frac{(11d)/72}{(11d)/16} = -\frac{2}{9},$$

$$x_{\text{near}} = -\frac{3d}{16} - \frac{5d}{24} = \frac{9d-10d}{48} = -\frac{d}{48}, \quad M_{\text{near}} = -\frac{(5d)/24}{(5d)/16} = -\frac{2}{3}.$$

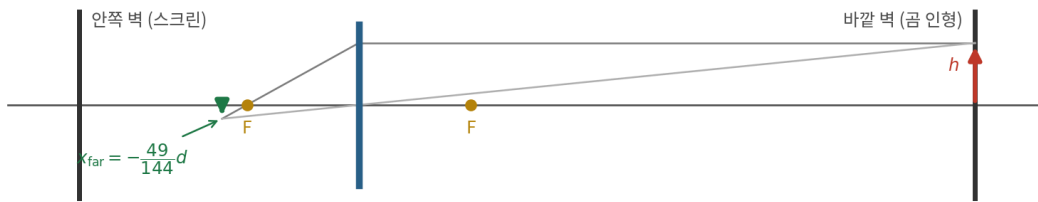
$$x_{\text{far}} = -\frac{49d}{144}, \quad M_{\text{far}} = -\frac{2}{9}; \quad x_{\text{near}} = -\frac{d}{48}, \quad M_{\text{near}} = -\frac{2}{3}$$

두 경우 모두 $s_i > 0$ 이므로 **실상**, $M < 0$ 이므로 **도립**, $|M| < 1$ 이므로 **축소**된 상이다.

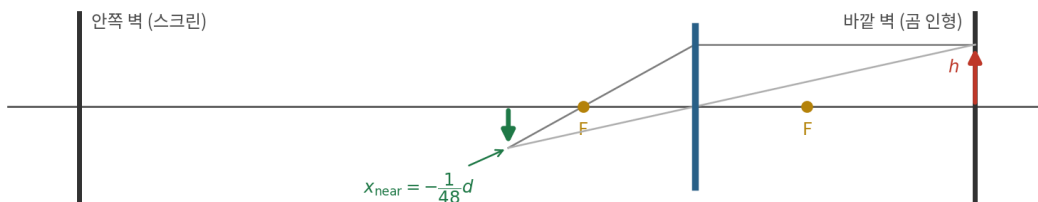
두 경우 모두 $s_o > 2f = d/4$ 이므로 도립 축소 실상이 되는 것이 당연하며, 물체가 렌즈에 가까워질수록 ($11d/16 \rightarrow 5d/16$) 상은 렌즈에서 멀어지고 ($11d/72 \rightarrow 5d/24$) 배율의 크기도 커진다 ($2/9 \rightarrow 2/3$).

볼록 렌즈의 결상 — 두 극단 위치 ($f = d/8$, 곰 인형은 $x = +d/2$ 에 고정, 상은 모두 도립 축소 실상)

$$\text{가장 멀 때 — 렌즈 } x = -\frac{3d}{16}, \quad s_o = \frac{11d}{16}, \quad s_i = \frac{11d}{72}, \quad M = -\frac{2}{9}$$



$$\text{가장 가까울 때 — 렌즈 } x = +\frac{3d}{16}, \quad s_o = \frac{5d}{16}, \quad s_i = \frac{5d}{24}, \quad M = -\frac{2}{3}$$



예시 작도 — 렌즈가 진동의 양 끝 $x = \pm 3d/16$ 에 있을 때의 광선 작도와 상의 위치

$$(2-2)(3) \frac{3}{2}h \leq y \leq \frac{9}{2}h$$

여기서 y 는 스크린에 맺힌 빛점이 광축으로부터 떨어진 **거리**이므로 항상 0 이상인 값이다.

광축과 나란하게 입사한 광선은 볼록 렌즈를 지난 뒤 반드시 렌즈 뒤쪽 초점을 지난다. 렌즈면에서 광축으로부터 거리가 h 였던 광선이 렌즈에서 거리 f 만큼 간 곳에서 광축과 만나므로, 렌즈를 지난 뒤 광선이 광축과 이루는 기울기의 크기는 h/f 이다. 렌즈에서 거리 D 떨어진 스크린에서는 광축을 지나 반대쪽으로 $D - f$ 만큼 더 진행한 셈이므로

$$y = \frac{h}{f}(D - f) = h\left(\frac{D}{f} - 1\right).$$

스크린은 용수철이 매달린 벽 ($x = -d/2$) 에 고정되어 있고 렌즈는 단진동하므로, 렌즈-스크린 거리는 $D = x_{\text{렌즈}} + d/2$ 로 함께 변한다. $f = d/8 = 2d/16$ 을 써서 두 극단을 계산하면

- 렌즈가 가장 바깥 ($x = +3d/16$): $D = 3d/16 + 8d/16 = 11d/16$,

$$y = h \cdot \frac{11d/16 - 2d/16}{2d/16} = \frac{9}{2}h$$

- 렌즈가 가장 안쪽 ($x = -3d/16$): $D = -3d/16 + 8d/16 = 5d/16$,

$$y = h \cdot \frac{5d/16 - 2d/16}{2d/16} = \frac{3}{2}h$$

D 가 $5d/16$ 과 $11d/16$ 사이를 연속적으로 오가고 y 는 D 에 대한 일차식이므로, 스크린 위의 빛점도 그 사이를 빠짐없이 쏘고 지나간다. 두 극단 모두 $D > f$ 이므로 광선은 항상 광축을 한 번 가로지른 뒤 스크린에 닿고, 빛점은 입사 광선의 반대쪽에 나타난다(거리를 물었으므로 범위는 양수로 답한다).

$$\frac{3}{2}h \leq y \leq \frac{9}{2}h \quad (\text{광축을 기준으로 입사 광선의 반대쪽})$$

(2-3) 가속도의 크기 $a = \sqrt{2}g$, 방향은 경사면을 따라 바깥·위쪽

① **회전 좌표계에서의 힘**. 수레 내부 관찰자가 보는 힘은 연직 아래로 작용하는 중력 mg 와, 수평 바깥쪽으로 작용하는 원심력 mv^2/R 이다. $R = v^2/(4g)$ 이므로

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{mv^2}{v^2/(4g)} = 4mg.$$

② **경사면 방향으로의 분해**. 경사면은 45° 이고 바깥쪽으로 갈수록 높아진다. 경사면을 따라 바깥·위를 향하는 방향과 경사면에 수직인 방향으로 분해하면, 두 방향 모두 연직·수평과 45° 를 이루므로 각 성분에 $1/\sqrt{2}$ 가 붙는다.

$$F_{\parallel} = \frac{4mg}{\sqrt{2}} - \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{3mg}{\sqrt{2}} \quad (\text{바깥·위 방향}),$$

$$N = \frac{4mg}{\sqrt{2}} + \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{5mg}{\sqrt{2}}.$$

원심력은 경사면을 밀어 올리는 쪽에, 중력은 끌어내리는 쪽에 기여하므로 빗면 방향으로 서로 빼고, 면을 누르는 방향으로 둘 다 같은 쪽이므로 더한다.

③ **마찰력**. 알짜 빗면 성분이 바깥·위를 향하므로 물체는 그 방향으로 미끄러지기 시작하고, 운동마찰력은 반대인 안쪽·아래로 작용한다.

$$f = \mu N = \frac{1}{5} \cdot \frac{5mg}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}}.$$

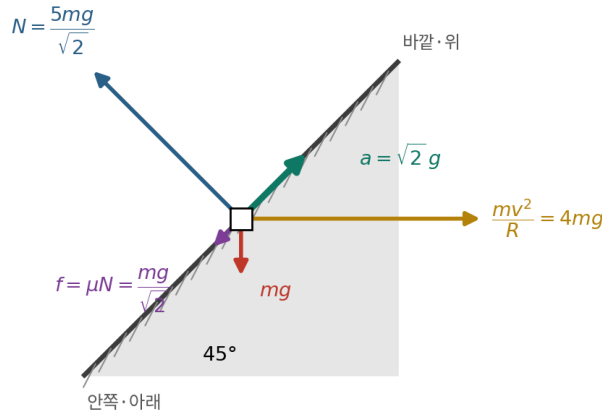
④ **가속도**.

$$ma = F_{\parallel} - f = \frac{3mg}{\sqrt{2}} - \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{2mg}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}mg$$

$$a = \sqrt{2}g \approx 1.41g, \quad \text{방향: 경사면을 따라 바깥·위쪽(회전 중심에서 멀어지는 쪽)}$$

$t = 0$ 에는 물체가 정지해 있으므로 회전 좌표계에서 속도에 비례하는 관성력(전향력)은 나타나지 않고, 중력·원심력·수직 항력·마찰력만 고려하면 된다.

45° 경사면 위 물체에 작용하는 힘 (회전 좌표계, $t = 0$)



예시 작도 — $t = 0$ 에서 물체에 작용하는 네 힘과 알짜 가속도

(2-4)(1) 톱니 모양 — 완전한 상승과 그 절반 시간의 가파른 하강이 반복되며 봉우리가 $1/\sqrt{2}$ 배씩 낮아진다

(2-3)에서 얻은 대로, 경사면 방향 알짜 보존력 성분 $F_{\parallel} = 3mg/\sqrt{2}$ 는 항상 바깥·위쪽으로 일정하고 수직 항력도 $N = 5mg/\sqrt{2}$ 로 일정하다. 따라서 마찰력의 크기 $f = mg/\sqrt{2}$ 도 일정하며, **운동 방향에 따라 부호만 바뀐다.**

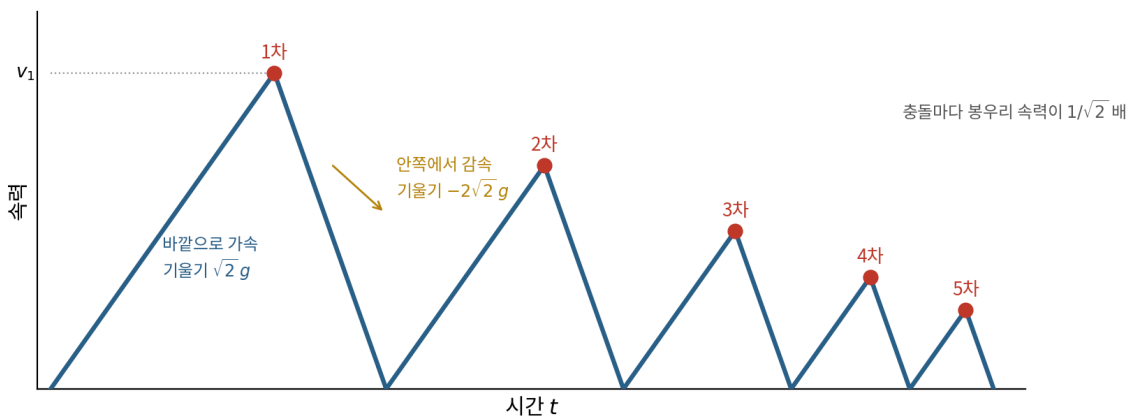
- 바깥·위로 갈 때: 마찰이 안쪽으로 $\rightarrow a_{\text{out}} = (F_{\parallel} - f)/m = \sqrt{2}g$ (가속)
- 안쪽·아래로 갈 때: 마찰도 바깥쪽으로 $\rightarrow a_{\text{in}} = (F_{\parallel} + f)/m = 2\sqrt{2}g$ (감속)

물체는 선로 중앙에서 정지 상태로 출발해 바깥 벽까지 거리 $d/2$ 를 a_{out} 로 가속하며 **1차 충돌**을 한다. 탄성충돌이므로 속력은 그대로인 채 방향만 안쪽으로 바뀌고, 이때는 감속도가 $a_{\text{in}} = 2a_{\text{out}}$ 로 두 배이므로 절반의 시간·절반의 거리 만에 멈춘다. 그 지점에서 다시 바깥으로 가속되어 두 번째 충돌을 하며, 이 과정이 되풀이된다. **모든 충돌은 바깥 벽에서만 일어난다.**

각 구간이 등가속도 운동이므로 속력-시간 그래프는 직선 조각들이 이어진 톱니 모양이 된다.

- 기울기: 바깥으로 갈 때 $+\sqrt{2}g$, 안쪽으로 갈 때 $-2\sqrt{2}g$ (하강 구간이 두 배 가파르고, 그래서 상승 구간의 절반 시간만 걸린다).
- 봉우리(충돌 순간): 탄성충돌이라 속력이 보존되므로 그래프가 끊기지 않고 꼭짓점을 이룬다.
- 골(안쪽 반환점): 속력이 정확히 0이 된다.
- 봉우리의 높이: 왕복 한 번마다 운동 에너지가 절반이 되므로 속력은 $1/\sqrt{2}$ 배씩 줄어든다.

물체의 속력-시간 그래프 — 모든 충돌은 바깥 벽에서 일어난다



예시 작도 — 완전한 상승 ($\sqrt{2}g$) 과 가파른 하강 ($2\sqrt{2}g$) 이 번갈아 나타나며, 충돌마다 봉우리 속력이 직전의 $1/\sqrt{2}$ 배로 낮아진다.

(2-4)(2) 총 이동 거리 = $\frac{23}{16}d$

일·에너지 정리로 따지면 편리하다. 경사면을 따라 거리 ℓ 만큼 움직일 때 운동 에너지의 변화는

- 바깥으로 갈 때: $+ma_{\text{out}}\ell = \sqrt{2}mg\ell$ (증가)
- 안쪽으로 갈 때: $-ma_{\text{in}}\ell = -2\sqrt{2}mg\ell$ (감소)

이다. 물체는 중앙에서 정지 상태로 출발해 바깥 벽까지 $d/2$ 를 가므로 1차 충돌 직전의 운동 에너지는

$$E_1 = \sqrt{2}mg \cdot \frac{d}{2}.$$

충돌 후 안쪽으로 들어가 멈추는 거리(침투 거리) s_1 은 $2\sqrt{2}mgs_1 = E_1$ 에서

$$s_1 = \frac{E_1}{2\sqrt{2}mg} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{d}{4}.$$

거기서 다시 같은 거리 s_1 을 바깥으로 가속해 2차 충돌을 하므로 그때의 운동 에너지는

$$E_2 = \sqrt{2}mgs_1 = \sqrt{2}mg \cdot \frac{d}{4} = \frac{E_1}{2}.$$

즉 충돌할 때마다 운동 에너지가 정확히 절반이 되고, 침투 거리도 절반이 된다.

$$s_n = \frac{d}{2^{n+1}} : s_1 = \frac{d}{4}, s_2 = \frac{d}{8}, s_3 = \frac{d}{16}, s_4 = \frac{d}{32}.$$

5번째 충돌까지의 경로는 (중앙 → 1차 충돌) 다음에 (안쪽 침투 → 되돌아옴)을 네 번 반복한 것이므로, 각 침투는 왕복이라 두 번씩 세어야 한다.

- 중앙 → 1차 충돌: $d/2$ • 1차 → 2차: $2s_1 = d/2$ • 2차 → 3차: $2s_2 = d/4$
- 3차 → 4차: $2s_3 = d/8$ • 4차 → 5차: $2s_4 = d/16$

$$s_{\text{총}} = \frac{d}{2} + 2\left(\frac{d}{4} + \frac{d}{8} + \frac{d}{16} + \frac{d}{32}\right) = \frac{d}{2} + 2 \cdot \frac{15d}{32} = \frac{d}{2} + \frac{15d}{16}.$$

$$s_{\text{총}} = \frac{8d + 15d}{16} = \frac{23}{16}d = 1.4375d$$

충돌 횟수를 무한히 늘리면 침투 거리의 합이 등비급수 $d/4 + d/8 + \dots = d/2$ 로 수렴하므로 총 이동 거리는 $d/2 + 2(d/2) = 3d/2$ 를 넘지 못한다. 5번째 충돌까지의 $23d/16$ 은 이미 그 극한값 $24d/16$ 에 매우 가깝다 — 마찰이 매 왕복마다 에너지의 절반을 깎아내기 때문에 운동이 빠르게 잦아든다.