YONSEI UNIVERSITY

2015학년도 수시모집 논술시험

연세대학교 논술시험

자연계열 · 물리

문제 · 예시답안

시험 구분	논술시험 (자연계열, 물리)
전형	2015학년도 수시모집
문항 수	1문항 (논제 4개)
핵심 개념	상대론적 질량·운동에너지와 일-운동에너지 정리, 자기장 속 하전입자의 원운동과 궤도 반지름, 톱니형 반사격자의 반사 법칙과 경로차, 박막에서의 빛의 간섭

제시문 그림 4점 · 예시답안 도해 5점 수록

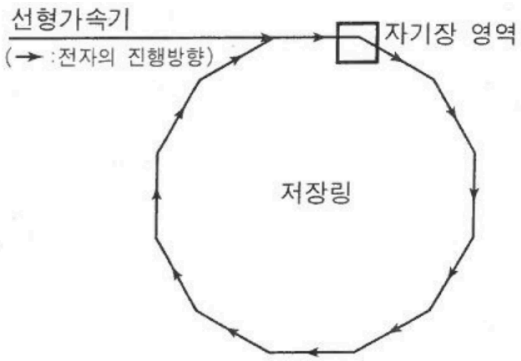
Ⅰ. 문제

문제 1 방사광가속기의 설계와 빛의 간섭을 이용한 박막 분석

논제 4개

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

방사광가속기는 가속운동을 하는 전자가 방출하는 빛을 이용하는 장치이다. 아래 [그림]과 같이 선형가속기에서 전자를 빛의 속력에 가깝게 가속하고, 가속된 전자를 가두어 회전운동을 시키는 저장링이라는 장치로 입사시킨다. 입사된 전자는 저장링을 회전하는 가속운동을 하며, 이때 방출되는 빛을 이용하여 다양한 실험을 할 수 있다. 아래와 같은 사항을 고려하여 이 장치를 설계하고, 물질의 특성을 분석하고자 한다.



[그림] 선형가속기와 12각형 저장링의 구조

[가] 직선 형태의 선형가속기에서 정지상태의 전자를 적절한 전기장을 이용하여 빛의 속력의 99%에 도달하도록 가속한다.

[나] 물체의 질량(m)은 물체의 속력에 따라 $m = m_0/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ 와 같이 변화하며 (m_0: 정지 질량, v: 물체의 속력, c: 빛의 속력), 물체의 총에너지는 운동에너지와 정지에너지의 합으로 나타난다.

[다] 저장링은 완전한 원형이 아니라 위 [그림]과 같은 12각형의 형태이다. 12각형의 꼭짓점에 자기장이 존재하는 영역을 만들어 전자의 직진 경로를 $30°$ 씩 휘게 한다. 즉, 전자는 대부분의 경로에서는 직선운동을 하며 자기장 영역을 지나는 동안 경로가 꺾이게 된다.

[라] 저장링에서 전자의 진행방향이 바뀌는 동안 다양한 파장의 빛이 동일한 위상으로 동시에 방출되며, 단색화장치(단색기)를 이용하여 특정 파장의 빛만을 선택할 수 있다.

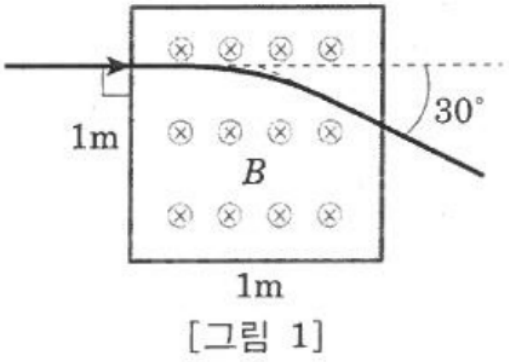
[마] 단색화장치로부터 선택한 파장의 빛을 이용하여 물질의 특성을 측정하는 실험이 가능하다. 한 예로, 파장이 짧은 빛을 사용하여 얇은 막이 입혀진 시료의 반사율을 측정하면 그 막의 두께와 표면의 거친 정도를 알아낼 수 있다.

〈참고〉

빛의 속력 c	3.0×10^{8} m/s	전자의 정지질량 m_e	9.0×10^{-31} kg
전자의 전하량 e	1.6×10^{-19} C	근삿값	$0.99^2=0.98,\ \sqrt{2}=1.4,\ \sqrt{3}=1.7$

논제 1 선형가속기에서는 단계적으로 증가하는 전기장을 이용하여 전자를 가속하여 운동에너지를 증가시킨다. 단계적 전기장은 전하(e)가 있는 전극을 차례로 배치하여 얻을 수 있다. 초기에 정지 상태에 있던 전자의 속력이 빛의 속력의 99%에 도달할 때의 운동에너지와 그 속력까지 가속하는 데 필요한 총 전위차를 구하시오.

논제 2 저장링에 입사된 전자는 빛의 속력의 99%로 운동하며, 아래 [그림 1]과 같이 12각형의 꼭짓점에서 자기장에 의해 $30°$ 선회하게 된다. 저장링을 설계하는 과정에서 [그림 1]과 같이 일정한 자기장(B)이 존재하는 영역을 한 변의 길이가 1 m 인 정사각형 모양으로 만들었다. 빛의 속력의 99%로 운동하는 전자가 이 영역을 지나는 동안 $30°$ 만큼 경로를 휘게 하는 데 필요한 자기장의 세기를 구하시오. (단, 자기장은 정사각형 영역 안에서 균일하며, 전자가 지나는 평면에 수직이다. 또한 전자는 정사각형 영역의 한 면에 수직으로 입사하며, 자기장 영역을 지나는 동안 전자의 속력은 바뀌지 않는다고 가정한다.)

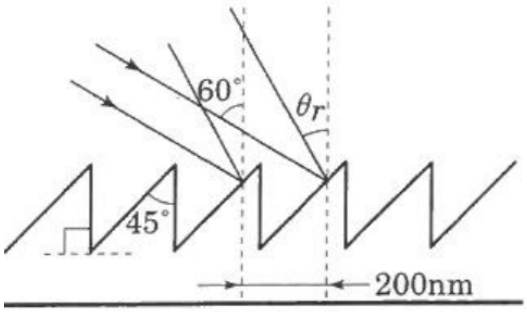


[그림 1]

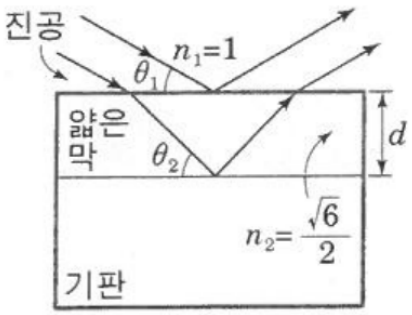
[그림 1] 정사각형 자기장 영역을 지나며 $30°$ 휘어지는 전자의 경로

논제 3 특정 파장의 빛만을 선택하기 위한 단색화장치는 아래 [그림 2]와 같은 톱니 모양의 규칙적인 구조를 가지는 면에서 일어나는 빛의 반사와 간섭현상을 이용한다. 가상의 단색화장치는 [그림 2]와 같이 상단부의 각도들 $45°$, 톱니 간 간격을 200 nm 로 설계하였다. 단색화장치에 [그림 2]와 같이 $60°$ 로 입사한 빛이 반사되어 나가는 각도(θ_r)와 그 각도에서 보강간섭을 일으킬 수 있는 최대 파장의 크기를 구하시오.

논제 4 아래 [그림 3]과 같이 기판 위에 굴절률 n_2 인 물질이 얇은 막 상태로 입혀져 있다. 단색화장치로부터 선택한, 파장이 34 nm 인 빛을 진공에서 얇은 막에 입사시켜 반사되는 반사율을 측정하였다. 진공의 굴절률은 $n_1 = 1$ 이고, 얇은 막의 굴절률은 $n_2 = \sqrt{6}/2$ 이다. 진공에서 빛이 얇은 막으로 입사할 때 진공–막 사이 경계면과 입사하는 빛 사이의 각은 θ_1 이며, 얇은 막 안으로 굴절되어 들어간 빛과 막–기판 사이 경계면과의 각도는 θ_2 이다. θ_1 의 크기가 $30°$ 일 때 보강간섭이 일어나는 얇은 막의 최소 두께(d)를 구하시오. (단, 기판의 굴절률은 얇은 막보다 크며, 얇은 막 안으로 굴절되어 들어간 빛이 막–기판 사이 경계면에서 반사되어 다시 진공–막 사이 경계면에 도달하면 모두 굴절되어 진공으로 투과하며, 기판은 얇은 막에 비해 충분히 두꺼워서 빛은 기판의 바닥까지 도달하지 못한다.)



[그림 2]



[그림 3]

[그림 2] 단색화장치의 톱니 구조와 빛의 반사 (왼쪽) · [그림 3] 얇은 막에서의 빛의 입사·굴절 (오른쪽)

II. 예시답안

논제 1 상대론적 운동에너지와 가속 전위차

상대론적 질량 · 일-운동에너지 정리

운동에너지 $K \approx 5 \times 10^{-13}$ J, 총 전위차 $V \approx 3.1 \times 10^{6}$ V

제시문 [나]에 따라 속력 v 로 움직이는 입자의 질량은 $m = \gamma m_0, \gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 이고, 총에너지는 $E = mc^2$, 정지에너지는 $E_0 = m_0 c^2$ 이다. 총에너지가 운동에너지와 정지에너지의 합이므로

$$K = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

이다. $v = 0.99c$ 이므로 참고 자료의 $0.99^2 = 0.98$, $\sqrt{2} = 1.4$ 를 써서

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - 0.98 = 0.02, \quad \sqrt{0.02} = \frac{\sqrt{2}}{10} = 0.14, \quad \gamma = \frac{1}{0.14} = \frac{50}{7} \approx 7.1$$

이고, 전자의 정지에너지는

$$m_0 c^2 = (9.0 \times 10^{-31}\ \text{kg})(3.0 \times 10^{8}\ \text{m/s})^2 = 8.1 \times 10^{-14}\ \text{J}$$

이다. 따라서

$$K = (\gamma - 1) m_0 c^2 \approx 6.1 \times 8.1 \times 10^{-14}\ \text{J} \approx 5 \times 10^{-13}\ \text{J}$$

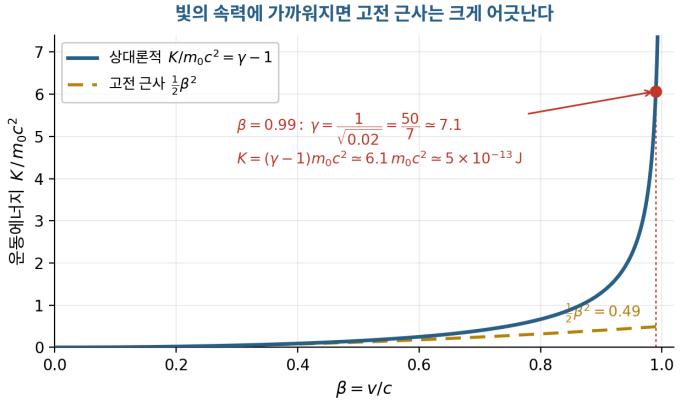
가속은 전기력이 하는 일로 이루어진다. 전위차 V 를 통과하는 동안 전기력이 전자에 해 주는 일은 $W = eV$ 이고, 일-운동에너지 정리에 의해 알짜힘이 한 일은 운동에너지의 변화량과 같다. 전자가 처음에 정지해 있었으므로 $eV = K - 0 = K$ 이고

$$V = \frac{K}{e} = \frac{5 \times 10^{-13}\ \text{J}}{1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}} \approx 3.1 \times 10^{6}\ \text{V}$$

의미 — $K \approx 3.1$ MeV 이고 전자의 정지에너지는 $m_0 c^2 \approx 0.51$ MeV 이므로, 운동에너지가 정지에너지의 약 6배에 이른다. 이 영역에서는 고전적인 $\frac{1}{2} m_0 v^2$ 을 쓸 수 없다. 실제로

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} (9.0 \times 10^{-31})(0.99 \times 3.0 \times 10^{8})^2 \approx 4.0 \times 10^{-14}\ \text{J}$$

로 참값의 약 $1/12$ 에 지나지 않는다. v/c 가 1에 가까워질수록 γ 가 발산하여 같은 속력 증가에 필요한 에너지가 급격히 커지며, 이것이 전자를 빛의 속력 이상으로 가속할 수 없는 이유이다.



예시 도해 — $K/m_0 c^2 = \gamma - 1$ 과 고전 근사 $\beta^2/2$ 의 비교 ($\beta = v/c$)

논제 2 자기장 영역에서 30° 선회시키는 자기장의 세기

로런츠 힘 · 등속 원운동 · 상대론적 운동량

$B \approx 6 \times 10^{-3}$ T

자기장 영역 안에서 속도가 자기장에 수직이므로 전자에는 크기 evB 의 자기력이 속도에 수직으로 작용한다. 속력이 변하지 않으므로 이 힘은 구심력 역할만 하고, 전자는 반지름 r 인 원호를 그린다. 이때 질량은 제시문 [나]의 $m = \gamma m_0$ 를 써야 하므로

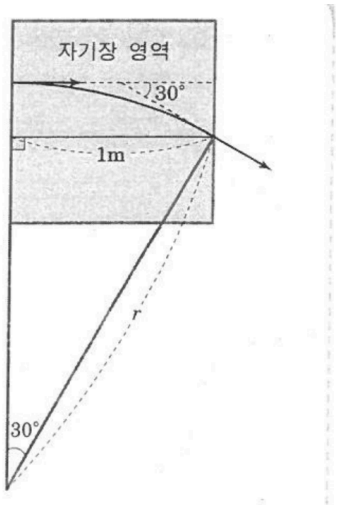
$$evB = m\frac{v^2}{r} = \frac{\gamma m_0 v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\gamma m_0 v}{eB} = \frac{p}{eB}, \quad B = \frac{\gamma m_0 v}{er}$$

이다. 즉 궤도 반지름은 (질량이 아니라) **상대론적 운동량** $p = \gamma m_0 v$ 로 결정된다.

(i) 필요한 궤도 반지름 — 전자는 정사각형의 왼쪽 면에 수직으로 입사하므로 처음 속도는 그 면의 법선(수평) 방향이고, 원의 중심은 속도에 수직인 방향, 곧 입사면 위에 놓인다. 중심에서 잰 회전각이 φ 일 때 전자가 진행 방향(수평)으로 나아간 거리는 $x = r\sin\varphi$ 이다. 자기장 영역을 빠져나가는 순간 진행 방향이 30° 꺾여 있어야 하므로 $\varphi = 30^\circ$ 이고, 그동안 정사각형의 한 변만큼인 $x = 1$ m 를 지나야 한다. 따라서

$$r\sin 30^\circ = 1 \ \text{m} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sin 30^\circ} \ \text{m} = 2 \ \text{m}$$

이다. (이때 수직 방향 변위는 $r(1-\cos 30^\circ) = 2(1-0.85) = 0.3$ m 로 한 변 1 m 보다 작아 전자는 실제로 정사각형 영역 안에 머문다.)



예시 도해 — 중심각 30°, 수평 이동 1 m 에서 $r\sin 30^\circ = 1$ m, 즉 $r = 2$ m

(ii) 자기장의 세기 — 논제 1에서 $\gamma = 1/\sqrt{1-0.99^2} = 1/0.14$ 이므로

$$B = \frac{\gamma m_0 v}{er} = \frac{m_0(0.99c)}{er\sqrt{1-0.99^2}} = \frac{(9.0\times10^{-31})(0.99\times3.0\times10^{8})}{(1.6\times10^{-19})(2)(0.14)}$$

$$= \frac{2.673\times10^{-22}}{4.48\times10^{-20}} \ \text{T} \approx 6\times10^{-3} \ \text{T}$$

$$B = \frac{\gamma m_0 v}{er} \approx 6\times10^{-3} \ \text{T} \quad (\approx 60 \ \text{G})$$

의미 — 만약 상대론적 효과를 무시하고 $m = m_0$ 를 썼다면 $B \approx 8\times10^{-4}$ T 로, 실제 필요한 값의 약 $1/7 (= 1/\gamma)$ 밖에 되지 않는다. 빛의 속력에 가까운 전자는 같은 속력이어도 운동량이 γ 배로 커져 훨씬 잘 휘지 않으므로, 가속기 편향자석의 설계에는 상대론적 운동량이 반드시 반영되어야 한다.

논제 3 톱니형 반사격자의 반사각과 보강간섭 최대 파장

반사 법칙 · 격자의 경로차

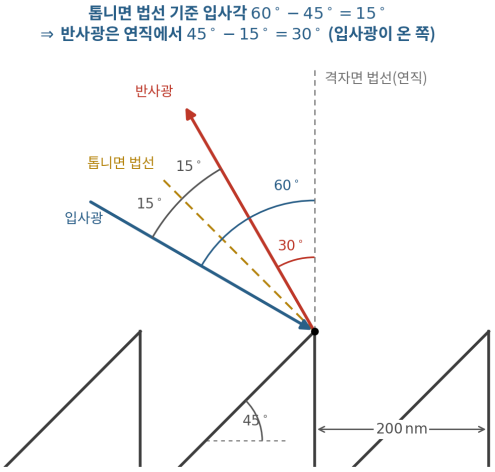
$\theta_r = 30^\circ$, 최대 파장 $\lambda_{\max} \approx 270$ nm

(i) 반사각 — 반사 법칙은 격자 전체의 겉면이 아니라 실제로 빛이 부딪히는 **톱니면**에 대해 적용해야 한다. 톱니면은 격자면(수평면)에 대해 45° 기울어져 있으므로, 톱니면의 법선도 연직선에 대해 45° 기울어져 있다. 입사광은 연직선에 대해 60° 이므로 톱니면의 법선을 기준으로 한 입사각은

$$60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

이다. 반사 법칙에 따라 반사광도 톱니면의 법선에 대해 15° 를 이루되 법선의 반대쪽으로 나아가므로, 연직선을 기준으로 하면

$$\theta_r = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \quad \text{(입사광이 들어온 쪽으로 되돌아가는 방향)}$$



예시 도해 — 45° 톱니면에서의 반사: 연직 기준 60° 입사 → 연직 기준 30° 반사

(ii) 이웃한 톱니에서 반사된 두 광선의 경로차 — 이웃한 두 톱니의 대응점을 D, B 라 하면 $\overline{DB} = 200$ nm 이고 DB 는 수평이다. 입사광은 연직선과 60° 를 이루므로 수평선 DB 와는 30° 를 이루고, 반사광은 연직선과 30° 를 이루므로 DB 와는 60° 를 이룬다.

- **반사 전** — D 로 향하는 광선의 파면에서 B 로 향하는 광선까지의 여분 경로는 $\overline{DB}$ 를 입사 방향으로 정사영한 길이이다. D 에서 B 로 가는 입사광선에 내린 수선의 발을 A 라 하면

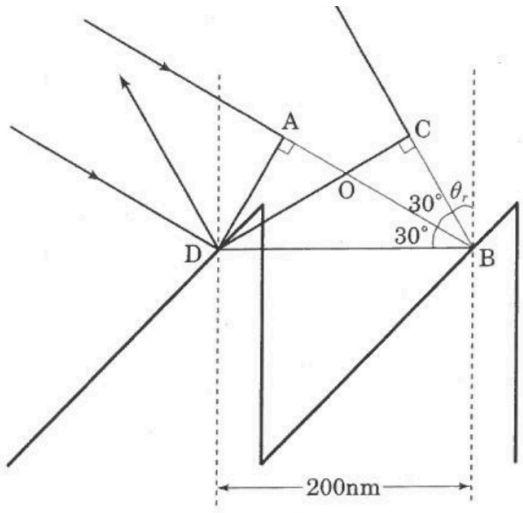
$$\overline{AB} = \overline{DB}\cos 30^\circ = 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3} \approx 170 \ \text{nm}$$

- **반사 후** — B 에서 반사된 광선에 D 에서 내린 수선의 발을 C 라 하면, B 에서 나온 광선이 D 를 지나는 공통 파면에 이르기까지 더 가는 거리는

$$\overline{BC} = \overline{DB}\cos 60^\circ = 200 \times \frac{1}{2} = 100 \ \text{nm}$$

두 몫은 모두 B 쪽 광선이 더 가는 거리이므로 더해진다.

$$\Delta = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{DB}(\sin 60^\circ + \sin 30^\circ) = 100\left(\sqrt{3}+1\right) \approx 270 \ \text{nm}$$



예시 도해 — 이웃한 톱니 D, B 에서 반사된 두 광선의 경로차 $\Delta = \overline{AB} + \overline{BC}$

(iii) 최대 파장 — 경로차가 파장의 정수배일 때 보강간섭이 일어나므로

$$\Delta = m\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\Delta}{m} = \frac{270}{m} \text{ nm}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

이다. 경로차 $\Delta \approx 270$ nm 가 0이 아니므로 $m = 0$ 은 있을 수 없고, λ 가 최대가 되는 것은 $m = 1$ 일 때이다.

$$\lambda_{\max} = \Delta = 100\left(1 + \sqrt{3}\right) \approx 270 \text{ nm}$$

의미 — 같은 방향 $\theta_r = 30°$ 로는 270 nm 외에도 135 nm, 90 nm, … 처럼 $270/m$ 인 파장들이 함께 보강간섭한다(고차 회절). 격자를 회전시켜 입사각과 반사각을 바꾸면 $\Delta = d(\sin\theta_i + \sin\theta_r)$ 가 달라지므로 원하는 파장만 골라낼 수 있으며, 이것이 제시문 [라]의 단색화장치가 작동하는 원리이다.

논제 4 박막에서 보강간섭이 일어나는 최소 두께

스넬 법칙 · 박막 간섭 · 반사에서의 위상 변화

$d \approx 20$ nm

(i) 굴절각 — 문제에서 θ_1 은 경계면과 입사광선이 이루는 각이므로, 법선을 기준으로 한 입사각은 $90° - \theta_1 = 60°$ 이다. 굴절각을 법선 기준으로 θ 라 하면 스넬 법칙 $n_1 \sin 60° = n_2 \sin\theta$ 에서

$$1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = 45°$$

이고, 따라서 경계면 기준으로 잰 $\theta_2 = 90° - 45° = 45°$ 이다.

(ii) 광경로차 — 막의 윗면에서 곧바로 반사된 광선(광선 1)과, 막 안으로 굴절되어 들어가 기판에서 반사되고 다시 나오는 광선(광선 2)을 비교한다. 두께 d 인 막을 굴절각 θ 로 왕복하므로 광선 2가 막 안에서 지나는 기하학적 거리는 $2d/\cos\theta$ 이고, 그동안 광선 1은 진공에서 $2d\tan\theta\sin 60°$ 만큼을 더 지난다. 굴절률을 곱해 광경로로 바꾸면

$$\Delta = n_2\frac{2d}{\cos\theta} - n_1(2d\tan\theta)\sin 60°$$

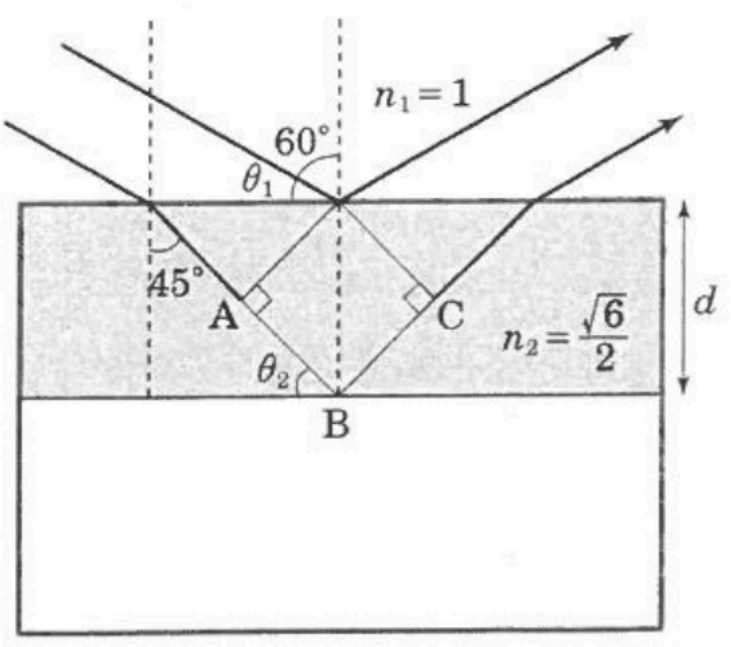
이고, 스넬 법칙 $n_1 \sin 60° = n_2 \sin\theta$ 를 대입하면

$$\Delta = \frac{2n_2 d}{\cos\theta} - 2n_2 d\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = 2n_2 d\frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta} = 2n_2 d\cos\theta$$

이다. $n_2 = \sqrt{6}/2, \theta = 45°$ 이므로

$$\Delta = 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2}d = \sqrt{3}d$$

([그림]의 수선의 발 A, C 로 나타내면 $\overline{AB} + \overline{BC} = \sqrt{2}d$ 이므로 $\Delta = n_2\left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) = \left(\sqrt{6}/2\right)\left(\sqrt{2}d\right) = \sqrt{3}d$ 로 같은 결과를 얻는다.)



예시 도해 — 두 반사광선의 광경로차 $\Delta = n_2\left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) = \sqrt{3}d$

(iii) 반사에서의 위상 변화 — 굴절률이 작은 매질에서 큰 매질로 진행하다가 반사될 때 위상이 π 만큼 뒤집힌다.

- 광선 1: 진공($n_1 = 1$) → 막($n_2 = \sqrt{6}/2 \approx 1.22$) 경계에서 반사 → 위상 반전 있음
- 광선 2: 막(n_2) → 기판($n_3 > n_2$) 경계에서 반사 → 위상 반전 있음

두 광선이 똑같이 한 번씩 위상 반전을 겪으므로 그 효과는 서로 상쇄되어 **추가 위상차가 없다**. 일반적으로 박막 간섭의 조건은 위상 반전 횟수에 따라 다음과 같이 갈린다.

- 두 반사에서 위상 반전이 **모두 일어나거나 모두 일어나지 않을 때** ($n_1 < n_2 < n_3$ 또는 $n_1 > n_2 > n_3$)
  보강: $\Delta = m\lambda$, 상쇄: $\Delta = (m + 1/2)\lambda$
- 두 반사 중 **한 번만** 위상 반전이 일어날 때 ($n_1 < n_2 > n_3$ 등)
  보강: $\Delta = (m + 1/2)\lambda$, 상쇄: $\Delta = m\lambda$

이 문제는 $n_1 = 1 < n_2 < n_3$ 이므로 첫째 경우에 해당하고, 보강간섭 조건은 광경로차가 파장의 정수배인 경우 그대로이다.

$$\sqrt{3}d = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

$d > 0$ 이어야 하므로 $m = 0$ 은 제외되고, 최소 두께는 $m = 1$ 일 때이다. $\lambda = 34$ nm, $\sqrt{3} = 1.7$ 을 대입하면

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{\sqrt{3}} = \frac{34 \ \text{nm}}{1.7} = 20 \ \text{nm}$$

의미 — 만일 기판의 굴절률이 막보다 작았다면 광선 2에는 위상 반전이 없어 조건이 $\sqrt{3}d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ 로 바뀌고 최소 두께는 $\lambda/\left(2\sqrt{3}\right) = 10$ nm 가 된다. 즉 보강간섭 조건은 막 자체의 두께뿐 아니라 위·아래 매질의 굴절률 관계에도 민감하다. 거꾸로 파장이나 입사각을 바꾸면서 반사율이 최대가 되는 조건을 찾으면 $d = m\lambda/(2n_2\cos\theta)$ 로부터 막의 두께를 알아낼 수 있고, 이것이 제시문 [마]에서 말한 박막 분석의 원리이다.