

연세대학교 논술시험

자연계열 · 물리

문제 · 예시답안

시험 구분
전형
문항 수
배점
핵심 개념

논술시험 (자연계열, 물리)
2014학년도 수시모집
1문항 (논제 5개)
논제당 8점
광자에 의한 이온화, 전기장에 의한 가속, 평균 자유 행로,
탄성 산란에서의 운동량·에너지 보존, $1/r$ 전기장 속도 선택기,
시료 깊이에 따른 에너지 손실과 질량 분해능

I. 문제

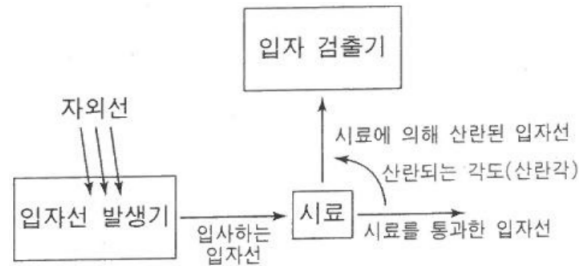
문제 1 이온 산란 실험을 이용한 원자핵 질량 분석

제시문 [가]~[바] · 논제 5개, 각 8점

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 고대 그리스의 데모크리토스는 모든 물질이 매우 작은 입자로 구성되어 있다는 원자설을 제안하였고, 이 생각은 1808년 영국의 돌턴에 의해 부활되었다. 1911년, 영국의 러더퍼드는 수많은 헬륨 핵을 금박에 충돌시켜 본 결과, 대부분은 금박을 관통하지만 일부는 진행 방향이 큰 각도로 바뀌는 것을 관찰하였다.

[나] [그림 1]과 같이 질량과 운동 에너지를 알고 있는 입자를 충돌시켜 산란 후의 에너지를 조사하면 시료를 구성하는 원자의 질량수를 알아낼 수 있다.



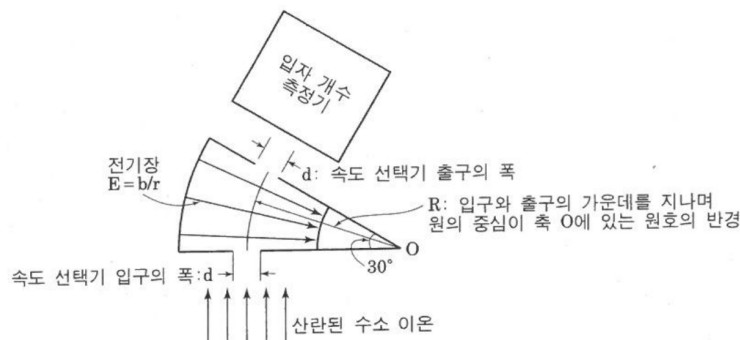
[그림 1] 이온 산란 실험 모식도

[다] 입자선 발생기는 수소 원자를 양이온으로 이온화 시키는 장치와 이온화된 수소 원자를 가속시키는 장치로 구성된다. 수소 원자는 자외선을 쬔어 이온화 시킨다. 속박되지 않은 자유전자의 에너지는 수소 원자에 가장 강하게 속박된 전자의 에너지보다 13.6 eV 이상 높다.

[라] 발생된 수소 이온은 가속 장치를 통과하며 일정한 운동 에너지를 가지며, 시료 방향으로 조사하여 산란 실험을 하기 위해서는 진행을 방해받는 경우가 없어야 한다. 가속된 수소 이온 1개가 단위길이당 공기 분자와 충돌하는 평균 횟수는 단위부피당 공기 분자의 개수와 공기 분자의 단면적의 곱과 같다. (단, 가속된 수소 이온의 속력은 빛의 속력에 비하여 매우 작다.)

[마] 시료에 입사한 수소 이온은 시료의 원자핵과 충돌하는 경우에는 큰 각도로 산란될 수 있고, 원자핵과 충돌하지 않는 경우에는 시료 내의 전자들과 상호작용하여 에너지를 잃을 수 있다.

[바] 입자 검출기는 속도 선택기와 입자 개수 측정기로 구성되어 있다. 속도 선택기는 [그림 2]와 같이 중심각이 30° 인 부채꼴을 밑면으로 하는 기둥 모양이며, 수소 이온이 속도 선택기 안에 걸려있는 전기장을 지나도록 설계되어 있다. 속도 선택기의 각 단면에서 축 O 로부터 거리가 r 만큼 떨어진 위치에서의 전기장은 축 O 를 향하며 그 크기는 $E = b/r$ 로 주어진다. (b 는 상수이다.)



[그림 2] 입자 검출기의 단면 구조. 산란된 수소 이온은 속도 선택기 입구에 수직으로 입사하며, 입구를 통과하는 위치는 무작위로 달라질 수 있고, 출구를 통과한 입자는 모두 입자 개수 측정기에 들어간다. (단, $d < R$ 이다.)

〈물리량 표〉

볼츠만 상수 (k_B)	$1.4 \times 10^{-23} \text{ J/K}$	수소 이온의 질량 (m_p)	$1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
기본 전하량 (e)	$1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$	전자의 질량 (m_e)	$9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
플랑크 상수 (h)	$6.6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$	정전기력 상수 (k)	$9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$

문제 1 수소 원자의 이온화와 가속

8점

수소 원자에서 전자를 떼어 내어 수소 양이온을 만들기 위해 찢어주어야 하는 자외선의 진동수에 대해서 논하고, 전기장을 사용하여 운동 에너지가 $2 \times 10^6 \text{ eV}$ 가 되도록 수소 이온을 가속하는 방법을 제안하시오.

문제 2 산란 실험을 위한 진공 조건

8점

이온화된 수소 원자가 공기 중(온도 300 K, 압력 10^5 N/m^2)에서 공기 분자와 부딪히지 않고 진행할 수 있는 평균 거리에 대하여 논하고, 산란 실험을 위한 실험 용기의 크기가 $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ 일 때 이온 산란 실험을 가능하게 하는 실험 용기 안의 공기 압력에 대하여 논하시오. 단, 공기 분자는 평균 반지름이 $1 \times 10^{-10} \text{ m}$ 인 구형이고, 실험 용기 안의 공기 온도는 300 K으로 일정하다.

문제 3 90° 산란된 수소 이온의 운동 에너지

8점

[그림 1]의 입자 산란 실험에서 특정한 운동 에너지(E_0)로 시료의 원자핵에 입사하여 90° 산란된 뒤에 시료 내 전자들과 상호작용 없이 검출기에 도달하는 수소 이온의 운동 에너지를 원자핵의 질량에 대한 함수로 논하시오. 단, 수소 이온은 시료의 원자핵과 한번만 충돌한다고 가정한다.

문제 4 속도 선택기의 통과 속력 범위와 질량 분해능

8점

[그림 2]와 같은 입자 검출기의 속도 선택기를 원호 또는 원호가 아닌 곡선의 경로로 통과할 수 있는 수소 이온의 속력 범위를 설명하고, 설명한 속력 범위를 사용하여 시료 원자핵의 질량을 구별할 수 있는 분해능(입자 검출기로 구별할 수 있는 최소의 질량 차이)을 설명하시오. 단, 검출기는 산란각이 90° 방향에 위치한다.

문제 5 시료 구조에 따른 검출 에너지 범위

8점

검출기를 산란각이 180° 방향에 위치시키고, [그림 3]과 같이 금(Au, 핵의 질량은 수소 이온의 197배)과 알루미늄(Al, 핵의 질량은 수소 이온의 27배)이 균일하게 섞인 시료(a)와, 금과 알루미늄이 각각 한 층으로 이루어진 시료(b)에 각각 수소 이온을 산란 실험하려 한다. 시료(a)에서와 시료(b)에서의 금 층과 알루미늄 층의 두께는 같다. 시료(a)를 사용한 실험과 시료(b)를 사용한 실험에서 시료의 원자핵과 한번만 충돌하여 검출기에 도달하는 수소 이온의 운동 에너지 범위를 비교하여 설명하시오. 단, 수소 이온이 원자핵과 충돌하지 않고 시료를 통과하는 경우에 시료의 구성 원소와 상관없이 단위길 이당 운동 에너지의 손실이 같고, 두 실험에서 시료를 완전히 통과한 수소 이온은 초기 운동 에너지의 2%를 잃는다고 가정한다.



[그림 3] 시료의 구조 및 수소 이온의 입사 방향

II. 예시답안

문제 1 수소 원자의 이온화와 가속

광자 1개의 에너지 · 일-운동 에너지 정리

진동수 $f \geq 3.3 \times 10^{15}$ Hz, 가속 전압 $V = 2 \times 10^6$ V (= 2 MV)

(가) 이온화에 필요한 자외선의 진동수 — 제시문 [다]에서 속박되지 않은 자유전자의 에너지는 수소 원자에 가장 강하게 속박된 전자보다 13.6 eV 이상 높다. 즉 바닥상태 수소 원자를 이온화하는 데 필요한 에너지(이온화 에너지)는

$$W_i = 13.6 \text{ eV} = 13.6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.176 \times 10^{-18} \text{ J}$$

이다. 빛과 전자의 상호작용은 광자 1개와 전자 1개 사이의 일대일 과정이므로, 광자 1개의 에너지 $E = hf$ 가 W_i 이상이어야 전자가 떨어져 나온다.

$$hf \geq W_i \Rightarrow f \geq \frac{W_i}{h} = \frac{2.176 \times 10^{-18}}{6.6 \times 10^{-34}} \approx 3.3 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$f \geq 3.3 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

이 진동수는 파장 $\lambda = c/f \approx 9.1 \times 10^{-8} \text{ m} = 91 \text{ nm}$ 에 해당하여 실제로 자외선 영역이며, 제시문 [다]의 “자외선을 쬔어 이온화 시킨다”와 일치한다.

진동수가 이보다 작으면 빛의 세기를 아무리 키워도 이온화가 일어나지 않는다. 세기를 키우는 것은 광자의 개수를 늘리는 것일 뿐 광자 한 개의 에너지 hf 를 키우지 못하기 때문이다. 반대로 $f > 3.3 \times 10^{15} \text{ Hz}$ 인 빛을 쬔면 남은 에너지 $hf - W_i$ 는 떨어져 나온 전자의 운동 에너지가 된다.

(나) 2×10^6 eV 로 가속하는 방법 — 전위차 V 가 걸린 두 평행판 사이에 수소 이온(전하 $+e$)을 정지 상태로 놓고 전기력이 이온을 밀도록 하면 된다. 전기장이 이온에 한 일은 경로에 무관하게 $W = eV$ 이고, 일-운동 에너지 정리에 의해 이 일이 그대로 운동 에너지로 바뀐다.

$$W = eV = \Delta K = K - 0 = K \Rightarrow V = \frac{K}{e}$$

목표 운동 에너지가 $K = 2 \times 10^6 \text{ eV} = 2 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} = 3.2 \times 10^{-13} \text{ J}$ 이므로

$$V = \frac{3.2 \times 10^{-13} \text{ J}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 2 \times 10^6 \text{ V}$$

$$V = 2 \times 10^6 \text{ V} = 2 \text{ MV}$$

전하량이 기본 전하 e 인 입자가 V 볼트의 전위차를 가로지르면 정의상 V [eV]의 에너지를 얻는다. 따라서 “ 2×10^6 eV”라는 목표는 곧 “ 2×10^6 V의 전위차”를 뜻하며, 위 계산은 이 정의를 그대로 확인한 것이다.

이때 얻어지는 속력은

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \times 3.2 \times 10^{-13}}{1.7 \times 10^{-27}}} \approx 1.9 \times 10^7 \text{ m/s} \approx 0.06c$$

로 빛의 속력의 6 % 정도이므로, 제시문 [라]의 “빛의 속력에 비하여 매우 작다”는 가정과 모순되지 않아 비상대론적으로 다루어도 된다. 실제 장치로는 2 MV 를 한 번에 거는 대신, 같은 방향의 전기장이 반복해서 걸리는 여러 개의 가속 구간을 직렬로 이어 총 전위차가 2×10^6 V 가 되도록 만들어도 결과는 같다.

문제 2 산란 실험을 위한 진공 조건

평균 자유 행로 · 이상기체 상태방정식

공기 중 평균 자유 행로 $\lambda \approx 1.3 \times 10^{-6} \text{ m}$, 용기 안 압력 $P \lesssim 0.13 \text{ Pa}$

(가) 평균 자유 행로의 일반식 — 제시문 [라]에 따라 수소 이온 1개가 단위 길이를 지나는 동안 겪는 평균 충돌 횟수는

$$n = \left(\frac{N}{V} \right) S$$

이다. 여기서 N/V 는 단위부피당 공기 분자 수, S 는 공기 분자의 단면적이다. 반지름 $r = 1 \times 10^{-10}$ m 인 구이므로

$$S = \pi r^2 = \pi (1 \times 10^{-10})^2 \approx 3.14 \times 10^{-20} \text{ m}^2$$

공기를 이상기체로 보면 $PV = Nk_B T$ 에서 $N/V = P/(k_B T)$ 이므로

$$n = \frac{PS}{k_B T}$$

이다. 평균 충돌 횟수가 1이 되는 거리가 곧 부딪히지 않고 진행할 수 있는 평균 거리(평균 자유 행로)이므로

$$\lambda = \frac{1}{n} = \frac{k_B T}{PS}$$

(나) 대기 중($T = 300$ K, $P = 10^5$ N/m²) — 위 식에 대입하면

$$\frac{N}{V} = \frac{10^5}{(1.4 \times 10^{-23})(300)} = \frac{10^5}{4.2 \times 10^{-21}} \approx 2.4 \times 10^{25} \text{ m}^{-3},$$

$$\lambda = \frac{k_B T}{PS} = \frac{4.2 \times 10^{-21}}{(10^5)(3.14 \times 10^{-20})} \approx 1.3 \times 10^{-6} \text{ m}$$

즉 대기 중에서는 약 $1.3 \mu\text{m}$, 곧 0.01 mm 도 못 가서 공기 분자와 부딪힌다. 1 m 크기의 용기를 가로지르는 동안 약 10^6 회나 충돌하게 되므로, 대기압에서는 산란 실험이 불가능하고 반드시 감압(진공)이 필요하다.

(다) 실험 용기 안의 압력 조건 — 실험 용기의 한 변이 $l = 1$ m 이므로, 수소 이온이 용기를 가로지르는 동안 “진행을 방해받는 경우가 없어야” 한다는 조건은 그 구간의 평균 충돌 횟수가 1보다 작아야 한다는 뜻이다. 이는 평균 자유 행로가 용기 크기보다 커야 한다는 것과 같다.

$$nl = \frac{PSl}{k_B T} < 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{k_B T}{PS} > l$$

$$\Rightarrow P < \frac{k_B T}{Sl} = \frac{(1.4 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})}{(3.14 \times 10^{-20} \text{ m}^2)(1 \text{ m})} = \frac{4.2 \times 10^{-21}}{3.14 \times 10^{-20}} \approx 0.13 \text{ Pa}$$

$$P < \frac{k_B T}{Sl} \approx 0.13 \text{ Pa}$$

같은 결론을 비례관계로도 확인할 수 있다. $\lambda \propto 1/P$ 이므로 평균 자유 행로를 1.3×10^{-6} m 에서 1 m 로, 즉 약 7.5×10^5 배로 늘리려면 압력을 같은 배수만큼 낮추면 되고 $10^5 / (7.5 \times 10^5) \approx 0.13$ Pa 가 된다. 이는 대기압의 약 100 만분의 1 에 해당하는 진공이다. 실제 실험에서는 여유를 두어 이보다 더 낮은 압력으로 배기한다.

문제 3 90° 산란된 수소 이온의 운동 에너지

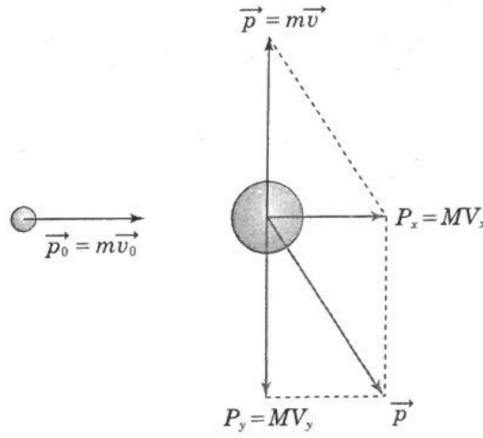
운동량 보존 · 탄성 충돌

$$E = \frac{M-m}{M+m} E_0 \quad (m: \text{수소 이온의 질량}, M: \text{시료 원자핵의 질량})$$

수소 이온의 질량을 m , 시료 원자핵의 질량을 M 이라 하자. 시료의 원자핵은 처음에 정지해 있고, 입사 방향을 x 축으로 잡는다. 초기 운동 에너지가 $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ 이므로 입사 속력은 $v_0 = \sqrt{2E_0/m}$ 이다. 충돌 후 수소 이온은 90° 산란되므로 그 속도는 x 축에 수직인 y 방향이고, 그 크기를 v 라 하자. 원자핵의 속도 성분을 V_x, V_y 라 하면 운동량 보존은 성분별로 다음과 같다.

$$x \text{ 성분: } mv_0 = MV_x \Rightarrow V_x = \frac{m}{M}v_0$$

$$y \text{ 성분: } 0 = mv + MV_y \Rightarrow V_y = -\frac{m}{M}v$$



90° 산란 직후의 운동량 관계. 원자핵이 되받는 운동량의 두 성분이 각각 입사 운동량과 산란 운동량을 상쇄한다.

러더퍼드 산란은 원자핵 사이의 정전기적 상호작용에 의한 탄성 충돌이므로 운동 에너지도 보존된다.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M(V_x^2 + V_y^2) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}\right)^2(v_0^2 + v^2)$$

양변에 2를 곱하고 M 을 곱해 정리하면

$$Mmv_0^2 = Mmv^2 + m^2(v_0^2 + v^2) \Rightarrow mv_0^2(M - m) = mv^2(M + m)$$

$$\therefore v^2 = \frac{M - m}{M + m}v_0^2$$

따라서 검출기에 도달하는 수소 이온의 운동 에너지는

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{M - m}{M + m}E_0$$

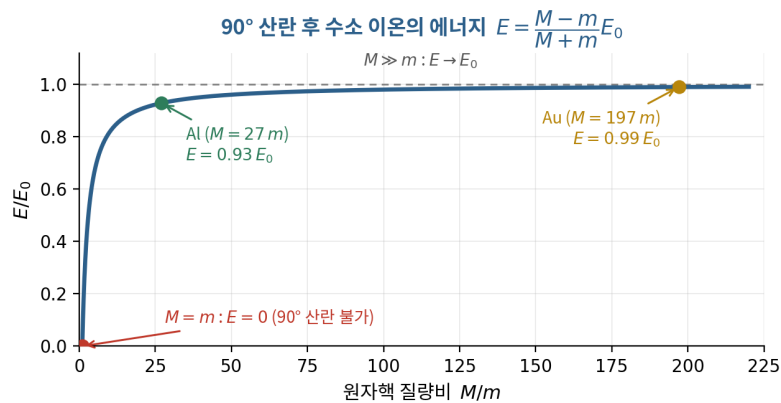
결과의 해석

- $M > m$ 이어야 한다. $M = m$ 이면 $v = 0$ 으로 수소 이온이 그 자리에 멈추고, $M < m$ 이면 $v^2 < 0$ 이 되어 해가 아예 없다. 즉 수소 이온은 자기보다 무거운 원자핵에서만 90°로 산란될 수 있고, 더 가벼운 표적에서는 90° 이상 꺾일 수 없다.
- $M \gg m$ 이면 $E \rightarrow E_0$. 무거운 원자핵은 거의 움직이지 않아 되받는 운동 에너지가 작고, 수소 이온은 방향만 바꾼 채 에너지를 거의 그대로 유지한다.
- **질량 측정 원리(제시문 [나]).** 위 식을 M 에 대해 풀면

$$M = \frac{E_0 + E}{E_0 - E}m$$

이므로, 입사 에너지 E_0 를 알고 산란 에너지 E 를 재면 표적 원자핵의 질량(질량수)을 곧바로 알아낼 수 있다.

- **수치 예.** 알루미늄($M = 27m$)은 $E = 26/28 \cdot E_0 \approx 0.93E_0$, 금($M = 197m$)은 $E = 196/198 \cdot E_0 \approx 0.99E_0$ 이다.



$E/E_0 = (M - m)/(M + m) \rightarrow M$ 이 커질수록 곡선이 완만해져 무거운 원소끼리는 구별이 어려워진다.

문제 4 속도 선택기의 통과 속력 범위와 질량 분해능

등속 원운동 조건 · 근사 · 분해능

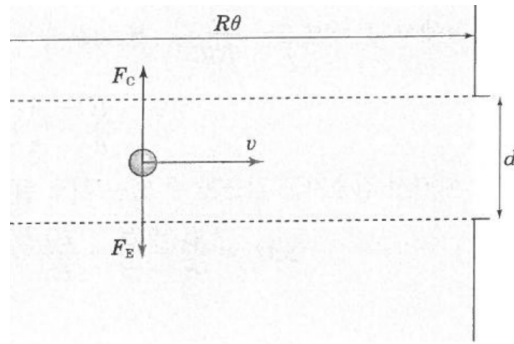
$$\sqrt{\frac{eb}{m}\left(1 - \frac{2d}{R\theta^2}\right)} < v < \sqrt{\frac{eb}{m}\left(1 + \frac{2d}{R\theta^2}\right)}, \quad \theta = 30^\circ = \pi/6 \text{ (라디안)}$$

(가) 정확히 원호를 그리는 속력 — 축 O 로부터 거리 r 에서 전기장은 O 를 향하고 크기가 $E = b/r$ 이므로, 전하 $+e$ 인 수소 이온이 받는 힘은 항상 O 를 향하는 크기 eb/r 의 구심력이다. 반지름 r 인 등속 원운동을 하려면 필요한 구심력과 같아야 하므로

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{eb}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{eb}{m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{eb}{m}}$$

이다. 양변에서 r 이 소거되므로 이 조건은 반지름에 무관하다. 즉 속력이 정확히 $\sqrt{eb/m}$ 인 이온은 입구의 어느 위치로 들어오더라도 그 위치의 반지름을 그대로 유지한 원호를 그리며 출구를 통과한다. 전기장을 $1/r$ 로 준 것이 바로 이 성질을 얻기 위한 설계이다.

(나) 원호가 아닌 곡선으로 통과하는 속력의 범위 — 속력이 $\sqrt{eb/m}$ 에서 조금 벗어나면 이온은 반지름이 변하는 곡선을 그린다. $d < R$ 이므로 통로 안에서 전기장의 세기를 대략 $E = b/R$ 로 보고, 부채꼴 통로를 폭 d , 길이 $R\theta$ 인 직선 통로로 펴서 근사하자.



부채꼴 통로를 편 근사. 진행 방향으로 힘은 없고, 반지름 방향으로만 원운동에 필요한 힘 $F_C = mv^2/R$ 과 실제 전기력 $F_E = eb/R$ 의 차이가 남는다.

반지름 R 인 원호에서 벗어나는 정도를 y (바깥쪽을 $+$)라 하면, 반지름 방향의 알짜 가속도는

$$ma_y = \frac{mv^2}{R} - \frac{eb}{R} \Rightarrow a_y = \frac{1}{m} \left(\frac{mv^2}{R} - \frac{eb}{R} \right) = \frac{1}{R} \left(v^2 - \frac{eb}{m} \right)$$

이다. 전기력은 반지름 방향뿐이므로 진행 방향 속력은 거의 $v \approx \sqrt{eb/m}$ 로 유지되고, 통로를 지나는 시간은

$$t = \frac{R\theta}{v} = R\theta \sqrt{\frac{m}{eb}}$$

이다. a_y 를 일정하다고 보면 출구에서의 이탈량은

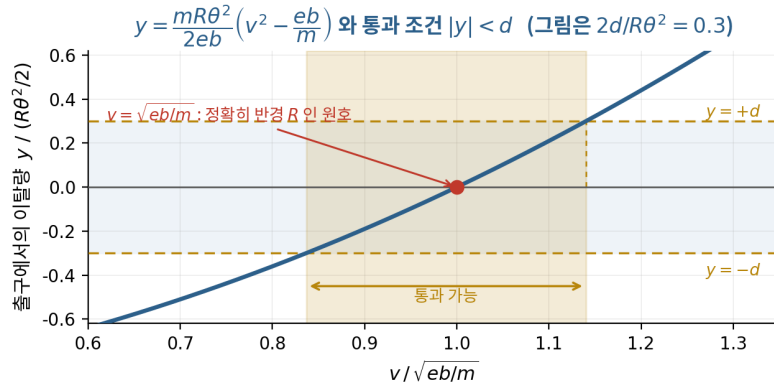
$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R} \left(v^2 - \frac{eb}{m} \right) \cdot R^2 \theta^2 \frac{m}{eb} = \frac{mR\theta^2}{2eb} \left(v^2 - \frac{eb}{m} \right)$$

이다. 입구를 지나는 위치가 폭 d 안에서 무작위로 달라지므로, 이탈량의 크기가 출구의 폭 d 보다 작으면 출구를 빠져나가는 이온이 존재한다. 반대로 $y \geq d$ 또는 $y \leq -d$ 이면 어느 위치로 들어오든 모두 벽에 부딪혀 한 개도 통과하지 못한다. 따라서 통과 조건은 $-d < y < d$ 이고

$$-d < \frac{mR\theta^2}{2eb} \left(v^2 - \frac{eb}{m} \right) < d \Rightarrow \frac{eb}{m} \left(1 - \frac{2d}{R\theta^2} \right) < v^2 < \frac{eb}{m} \left(1 + \frac{2d}{R\theta^2} \right)$$

$$\sqrt{\frac{eb}{m}\left(1 - \frac{2d}{R\theta^2}\right)} < v < \sqrt{\frac{eb}{m}\left(1 + \frac{2d}{R\theta^2}\right)}, \quad \theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \approx 0.52 \text{ rad}$$

θ 는 반드시 라디안으로 써야 하며 $\theta^2 = \pi^2/36 \approx 0.27$ 이다. 이 범위의 한가운데 값 $v = \sqrt{eb/m}$ 만이 정확한 원호를 그리고, 나머지는 바깥쪽 또는 안쪽으로 휘는 원호가 아닌 곡선을 그린다.



이탈량 y 는 v^2 에 대한 일차식이므로 통과 조건 $|y| < d$ 가 속력에 대한 하나의 좁은 창을 만든다. 창의 폭은 d 에 비례하고 $R\theta^2$ 에 반비례한다.

(다) 질량 분해능 — 검출기가 산란각 90° 방향에 있으므로 논제 3의 결과에 따라 검출기로 들어오는 이온의 운동 에너지는 $E = \frac{M-m}{M+m}E_0$ 이고, 그 속력은

$$v^2 = \frac{2E}{m} = \frac{2(M-m)}{m(M+m)}E_0$$

이다. 이를 (나)의 부등식에 넣고 양변에 $m/2$ 를 곱하면

$$\frac{eb}{2} \left(1 - \frac{2d}{R\theta^2} \right) < \frac{M-m}{M+m}E_0 < \frac{eb}{2} \left(1 + \frac{2d}{R\theta^2} \right)$$

이다. 여기서

$$A = \frac{eb}{2} \left(1 - \frac{2d}{R\theta^2} \right), \quad B = \frac{eb}{2} \left(1 + \frac{2d}{R\theta^2} \right)$$

로 두자. $\frac{M-m}{M+m}E_0 = X$ 를 M 에 대해 풀면 $M = \frac{E_0 + X}{E_0 - X}m$ 이고 이는 X 의 증가함수이므로, 위 부등식은 곧 통과 가능한 질량의 범위를 준다.

$$\frac{E_0 + A}{E_0 - A}m < M < \frac{E_0 + B}{E_0 - B}m$$

장치를 그대로 둔 채 통과해 버리는 질량의 폭이 곧 서로 구별할 수 없는 질량 차이이므로, 분해능은 이 구간의 길이이다.

$$\Delta M = \left(\frac{E_0 + B}{E_0 - B} - \frac{E_0 + A}{E_0 - A} \right) m = \frac{2(B-A)E_0}{E_0^2 - (A+B)E_0 + AB}m$$

$$B - A = \frac{2ebd}{R\theta^2}, \quad A + B = eb, \quad AB = \frac{e^2b^2}{4} \left(1 - \frac{4d^2}{R^2\theta^4} \right)$$

이므로

$$\Delta M = \frac{\frac{4ebd}{R\theta^2}E_0}{E_0^2 - ebE_0 + e^2b^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{d^2}{R^2\theta^4} \right)}m$$

이다. $d^2/(R^2\theta^4) \ll 1/4$ 이므로 마지막 항을 $1/4$ 로 근사하면 분모가 완전제곱식이 되어

$$\Delta M \approx \left(\frac{4ebd}{R\theta^2} \right) \frac{E_0}{(E_0 - eb/2)^2}m$$

- 출구 폭 d 를 좁히고 R 이나 θ 를 키울수록 ΔM 이 작아져 분해능이 좋아진다. 다만 d 를 좁히면 통과하는 이온 수가 줄어 신호가 약해지므로 실제로는 절충이 필요하다.
- 분모의 $E_0 - eb/2$ 는 곧 $E_0 - E$ 에 해당한다. 무거운 원자핵일수록 $E \rightarrow E_0$ 이어서 이 값이 작아지고 ΔM 은 급격히 커진다. 즉 무거운 원소일수록 질량을 구별하기 어렵다. 논제 3의 그래프가 큰 M 에서 평평해지는 것과 같은 이야기이다.

문제 5 시료 구조에 따른 검출 에너지 범위

정면 탄성 충돌 · 깊이에 따른 에너지 손실

시료(a): 82–86% 또는 94–98%, 시료(b): 82–84% 또는 96–98% (초기 운동 에너지 기준)

(가) 180° 산란에서의 충돌 손실 — 산란각이 180° 이면 정면 충돌 후 되튀는 1차원 문제가 된다. 수소 이온의 질량과 속도를 m, v , 충돌 후 속도를 v_1 , 정지해 있던 원자핵의 질량과 충돌 후 속도를 M, v_2 라 하면

$$\text{운동량 보존: } mv = mv_1 + Mv_2$$

$$\text{완전탄성충돌(반발계수 1): } v_2 - v_1 = v$$

두 식을 연립하여 $v_2 = v + v_1$ 을 대입하면

$$mv = mv_1 + M(v + v_1) \Rightarrow v_1 = -\frac{M-m}{M+m}v$$

이므로 충돌 직후의 운동 에너지 비는

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$$

이 식에 두 원소를 대입하면

$$\text{Au } (M = 197m) : \left(\frac{197-1}{197+1}\right)^2 = \left(\frac{196}{198}\right)^2 \approx 0.98 \rightarrow \text{충돌 손실 } 2\%,$$

$$\text{Al } (M = 27m) : \left(\frac{27-1}{27+1}\right)^2 = \left(\frac{26}{28}\right)^2 \approx 0.86 \rightarrow \text{충돌 손실 } 14\%$$

이다. 무거운 금 원자핵은 거의 되받지 않아 손실이 작고, 가벼운 알루미늄은 더 많이 되받아 손실이 크다.

(나) 시료 안을 지나며 잃는 에너지 — 단위 길이당 손실이 원소와 무관하게 같고, 시료 전체 두께 t 를 한 번 완전히 통과 하면 초기 운동 에너지의 2% 를 잃는다고 하였다. 검출기가 180° 방향이므로 이온은 깊이 x 까지 들어갔다가 같은 깊이를 되돌아 나온다. 즉 시료 안에서 지나는 총 길이는 $2x$ 이고, 이때의 손실은

$$\Delta E_{\text{경로}} = \frac{2x}{t} \times 0.02E_0 = \frac{0.04x}{t}E_0$$

이다. 따라서 시료의 맨 앞($x=0$)에서 충돌하면 경로 손실이 0, 맨 뒤($x=t$)에서 충돌하면 4% 로 최대가 된다. 전체 손실은 (가)의 충돌 손실에 이 경로 손실을 더한 값이다. (손실이 모두 작으므로 초기 에너지 E_0 를 기준으로 백분율을 더하는 일차 근사를 쓴다.)

(다) 시료(a) — Au와 Al이 균일하게 섞인 경우 — 두 원소 모두 시료의 앞면부터 뒷면까지 고르게 분포하므로, 충돌 깊이가 x 는 0 에서 t 까지 모든 값을 가질 수 있고 경로 손실은 0–4% 이다.

① Au와 충돌: 총 손실 2% + (0–4%) = 2–6% → 94–98% 의 에너지로 검출기 도달

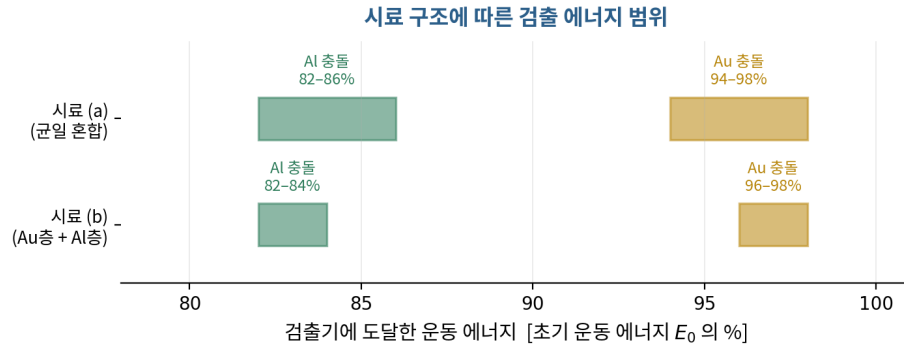
② Al과 충돌: 총 손실 14% + (0–4%) = 14–18% → 82–86% 의 에너지로 검출기 도달

(라) 시료(b) — Au층과 Al층이 각각 한 층인 경우 — 두 층의 두께가 같으므로 Au층은 앞쪽 절반($0 \leq x \leq t/2$), Al층은 뒤쪽 절반($t/2 \leq x \leq t$)을 차지한다. 그러면 경로 손실의 범위가 원소마다 달라진다.

① Au와 충돌($0 \leq x \leq t/2$): 경로 손실 0–2%, 총 손실 2–4% → 96–98%

② Al과 충돌($t/2 \leq x \leq t$): 경로 손실 2–4%, 총 손실 16–18% → 82–84%

(마) 두 실험의 비교



두 시료에서 검출되는 운동 에너지 범위. 층 구조인 시료(b)에서 각 봉우리의 폭이 절반으로 줄어든다.

- **공통점** — 어느 시료에서나 Au에 의한 신호와 Al에 의한 신호는 서로 겹치지 않는 두 개의 에너지 띠로 나타난다. 두 원소의 질량 차이가 커서 총돌 손실(2% 대 14%)이 경로 손실의 최대치(4%)보다 훨씬 크기 때문이며, 이 때문에 에너지만 재어도 어느 원소에서 산란되었는지 구별할 수 있다.
- **차이점** — 시료(a)에서는 두 원소가 전 두께에 걸쳐 있어 각 띠의 폭이 4%p 로 넓다(94-98%, 82-86%). 시료(b)에서는 각 원소가 두께의 절반에만 있어 띠의 폭이 2%p 로 절반이 된다(96-98%, 82-84%).
- **띠의 위치** — 시료(b)에서 앞쪽에 있는 Au의 띠는 손실이 작은 쪽(96-98%)으로 몰리고, 뒤쪽에 있는 Al의 띠는 손실이 큰 쪽(82-84%)으로 치우친다. 즉 **에너지 띠의 폭과 위치가 그 원소가 시료의 어느 깊이로 얼마만큼의 두께로 분포하는지를 그대로 알려 준다.** 검출된 에너지 스펙트럼만 보고도 시료(a)처럼 섞여 있는지 시료(b)처럼 층을 이루고 있는지 판별할 수 있다.