

연세대학교 논술

자연계열 · 물리

문제 · 예시답안

시험 구분
출제 과목
문항 수
주제
핵심 개념

수시모집 논술시험 (자연계열, 물리)
물리 I, 물리 II
1문제 · 하위문항 4개 ([1]~[4])
아르곤 이온빔을 이용한 미지 시료의 원소 분석
자기장 속 대전 입자의 나선 운동, 로렌츠 힘과 회전 주기,
1차원 완전탄성충돌, 등속 운동의 비행시간과 질량 분석

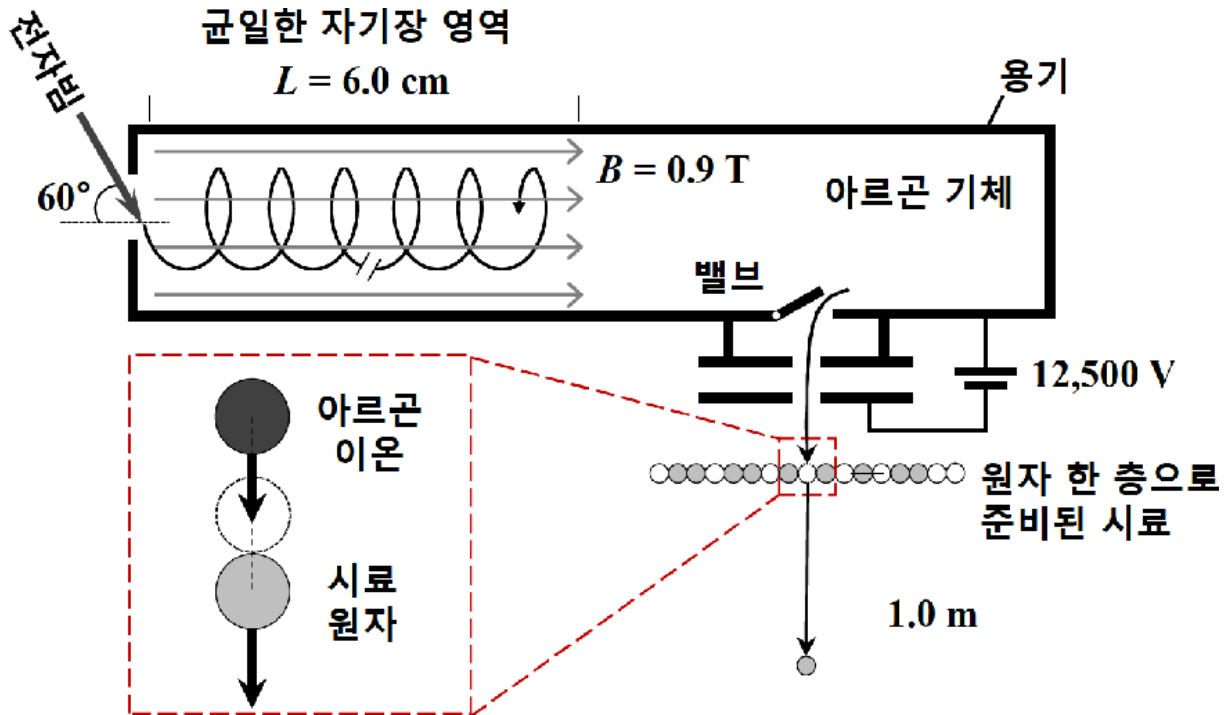
I. 문제

문제 아르곤 이온빔을 이용한 미지 시료의 원소 분석

물리 I · II · 하위문항 4개

※ 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

- (가) [그림1]과 같이 아르곤 기체가 채워진 용기에 전자빔을 입사시킨다. 용기 안으로 입사된 전자가 아르곤 원자와 충돌하면 아르곤 원자는 아르곤 이온(Ar^+)이 된다. 이때, 질량 변화는 없다고 하자. 아르곤 원자의 이온화 확률을 높이기 위해서는 전자와 아르곤 원자 간의 충돌 확률을 높여야 한다. 이를 위해 [그림1]과 같이 자기장이 균일하게 형성된 영역을 만들었다. 균일한 자기장 영역으로 입사된 전자는 로렌츠 힘에 의해 나선형 경로로 운동한다.
- (나) 위 과정을 통해 용기 내 모든 아르곤 원자가 이온화된다고 가정하자. 용기 아래쪽에는 순간적으로 매우 짧은 시간에 열리고 닫히는 밸브가 있다. 이 밸브를 이용하여 아르곤 이온을 하나씩 내보낼 수 있다고 하자. 용기 밖으로 나온 아르곤 이온은 정지해 있던 시료 원자와 정면으로 탄성 충돌한다 ([그림1]에 점선 박스로 표시된 확대 부분 참고). 만약 아르곤 이온과 충돌한 원자가 마그네슘(Mg)이라면, 충돌 전 정지 시료 원자 하나와 [그림1]에 점선 박스로 표시된 확대 부분과 같이 일직선상에서 정면으로 탄성 충돌한다. 충돌 전 정지해 있던 시료 원자는 충돌 후 연직 아래로 직선 운동한다.
- (다) 시료 원자가 시료를 출발하여 연직 아래 1.0 m만큼 떨어진 위치에 도달하는 시간을 t 라 하자. 시료 원자의 질량에 따라 운동 속도가 다르므로 같은 거리를 이동하는 데 걸리는 시간에 차이가 발생한다. 따라서 역으로 t 를 측정하면 시료의 구성 원소를 알아낼 수 있다.



[그림1] 실험 개요 — 전자빔에 의한 아르곤 이온화, 가속, 시료 원자와의 정면 충돌

[표1] 주기율표

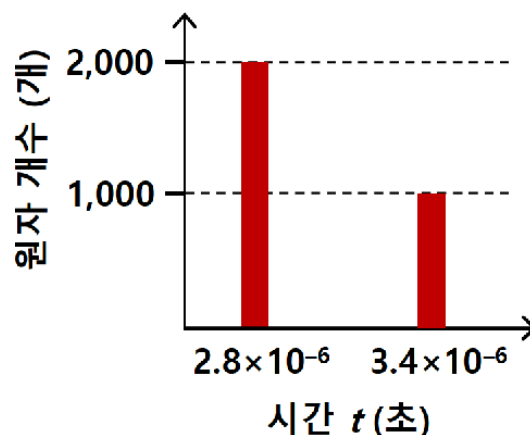
${}^1\text{H}$ 수소 $1m_u$							${}^2\text{He}$ 헬륨 $4m_u$
${}^3\text{Li}$ 리튬 $7m_u$	${}^4\text{Be}$ 베릴륨 $9m_u$	${}^5\text{B}$ 붕소 $11m_u$	${}^6\text{C}$ 탄소 $12m_u$	${}^7\text{N}$ 질소 $14m_u$	${}^8\text{O}$ 산소 $16m_u$	${}^9\text{F}$ 플루오린 $19m_u$	${}^{10}\text{Ne}$ 네온 $20m_u$
${}^{11}\text{Na}$ 나트륨 $23m_u$	${}^{12}\text{Mg}$ 마그네슘 $24m_u$	${}^{13}\text{Al}$ 알루미늄 $27m_u$	${}^{14}\text{Si}$ 규소 $28m_u$	${}^{15}\text{P}$ 인 $31m_u$	${}^{16}\text{S}$ 황 $32m_u$	${}^{17}\text{Cl}$ 염소 $35m_u$	${}^{18}\text{Ar}$ 아르곤 $40m_u$

[표2] 물리 상수 및 단위 변환

원주율 π	3.0
기본 전하량 e	$1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
전자의 질량 m_e	$9.0 \times 10^{-31} \text{ kg}$
원자의 질량 단위 m_u	$1.6 \times 10^{-27} \text{ kg}$
에너지 단위 변환	$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$

[주의] 단, 중력, 공기 저항, 지구 자기장의 효과는 무시하고, 물리 상수 및 단위 변환은 [표1]과 [표2]의 값을 사용한다.

- [1] [그림1]과 같이 전자가 균일한 자기장 방향에 대하여 60° 의 각도로 입사한다. 이 때 입사하는 전자의 운동에너지는 180 eV, 자기장 영역의 길이 L 은 6.0 cm, 자기장의 세기 B 는 0.9 T이다. 전자가 아르곤 원자와 충돌 없이 이 자기장 영역을 통과할 때, 나선 운동을 하며 회전한 총 횟수를 구하시오.
- [2] 아르곤 이온과 시료 원자를 크기가 같고 질량이 다른 쇠공이라고 가정하자. 운동하는 아르곤 이온이 정지해 있던 시료 원자와 일직선상에서 정면으로 탄성 충돌한다 ([그림1]에 점선 박스로 표시된 확대 부분 참고). 만약 아르곤 이온과 충돌한 원자가 마그네슘(Mg)이라면, 충돌 전 아르곤 이온의 속도(v_{Ar})에 대한 충돌 후 마그네슘 원자의 속도(v_{Mg})의 비($v_{\text{Mg}}/v_{\text{Ar}}$)가 얼마인지 구하시오.
- [3] 제시문과 같이 아르곤 이온은 12500 V의 전위차로 가속되어 시료 원자와 충돌한다. 이 충돌로 인해 운동을 시작한 시료 원자 하나가 시료로부터 연직 아래 1.0 m만큼 떨어진 위치에 도달하는 시간을 t 라 하자. 시료를 구성하는 어떤 두 원자의 질량 차이가 $1.0m_u$ 일 때, 두 원자의 도달 시간 차이 Δt 를 구하시오.
- [4] 미지의 시료가 어떤 원소로 구성되어 있는지 분석하기 위해 제시문에 설명된 시간 t 를 측정하는 실험을 3000번 반복하였다. 그 결과, [그림2]와 같이 $t = 2.8 \times 10^{-6}$ 초에 도달한 시료 원자가 2000개, $t = 3.4 \times 10^{-6}$ 초에 도달한 시료 원자가 1000개로 나타났다. 주어진 그래프와 주기율표를 바탕으로 미지의 시료가 무엇인지 추론하시오. 단, 그래프에 나타난 결과 이외에 다른 시간 t 에 도달한 시료 원자는 없다.



[그림2] 측정 결과 — 도달 시간별 시료 원자의 개수

II. 예시답안

문항 1 자기장 속 전자의 나선 운동과 총 회전 횟수

운동에너지 관계로부터 전자의 속도를 구해 자기장 영역의 통과 시간을 찾고, 원운동의 주기와 그 시간으로부터 총 회전 횟수를 구한다.

전자의 운동에너지를 $E_K (= 180 \text{ eV})$ 라 하면 $E_K = \frac{1}{2}m_e v^2$ 이므로 전자의 속도는

$$v = \sqrt{\frac{2E_K}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \times 180 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.0 \times 10^{-31}}} = \sqrt{64 \times 10^{12}} = 8 \times 10^6 \text{ (m/s)}$$

자기장 영역을 통과하는 데 걸리는 시간은 자기장에 평행한 속도 성분이 결정한다. 입사각이 자기장 방향에 대해 60° 이므로 평행 성분은

$$v_{\text{평행}} = v \cos 60^\circ = \frac{1}{2}v = 4 \times 10^6 \text{ (m/s)}$$

이고, 자기장 영역 L 을 지나는 데 걸리는 시간은

$$t_L = \frac{L}{v_{\text{평행}}} = \frac{6 \times 10^{-2}}{4 \times 10^6} = 1.5 \times 10^{-8} \text{ (s)}$$

한편 자기장에 수직인 속도 성분은 등속 원운동을 만든다. (구심력) = (로렌츠 힘) 의 관계와 주기 T 와 반지름 r 의 관계

$$\frac{m_e v_{\perp}^2}{r} = |e| v_{\perp} B, \quad T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}}$$

에서 $r = m_e v_{\perp} / (|e| B)$ 를 대입하면

$$T = \frac{2\pi m_e}{|e| B} \text{ (운동 반지름 및 속력과 무관)}$$

를 얻는다. 그러므로 자기장 영역을 통과하는 동안의 총 회전 횟수는

$$t_L \times \frac{1}{T} = t_L \times \frac{|e| B}{2\pi m_e} = 1.5 \times 10^{-8} \times \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 0.9}{2 \times 3 \times 9.0 \times 10^{-31}}$$

$$\frac{t_L}{T} = 400 \text{ (회)}$$

문항 2 1차원 완전탄성충돌 후의 속도비

운동량 및 운동에너지 보존을 이용하여, 충돌 전후의 속도 비를 구한다.

초기에 Mg는 정지해 있고 아르곤 이온과 Mg 원자의 충돌이 탄성 충돌이므로, 다음의 두 가지 보존 법칙을 만족한다. (충돌 후 아르곤 이온의 속도를 v'_{Ar} 라 한다.)

$$\text{(운동량 보존법칙)} \quad m_{\text{Ar}} v_{\text{Ar}} = m_{\text{Ar}} v'_{\text{Ar}} + m_{\text{Mg}} v_{\text{Mg}}$$

$$\text{(운동에너지 보존법칙)} \quad \frac{1}{2} m_{\text{Ar}} v_{\text{Ar}}^2 = \frac{1}{2} m_{\text{Ar}} v_{\text{Ar}}'^2 + \frac{1}{2} m_{\text{Mg}} v_{\text{Mg}}^2$$

두 식을 연립한다. 운동량 식을 $m_{\text{Ar}}(v_{\text{Ar}} - v'_{\text{Ar}}) = m_{\text{Mg}} v_{\text{Mg}}$, 에너지 식을 $m_{\text{Ar}}(v_{\text{Ar}} - v'_{\text{Ar}})(v_{\text{Ar}} + v'_{\text{Ar}}) = m_{\text{Mg}} v_{\text{Mg}}^2$ 로 정리하고 두 식을 나누면 완전탄성충돌의 상대속도 관계

$$v_{\text{Ar}} + v'_{\text{Ar}} = v_{\text{Mg}} \rightarrow v'_{\text{Ar}} = v_{\text{Mg}} - v_{\text{Ar}}$$

를 얻는다. 이를 운동량 식에 대입하면 $m_{\text{Ar}} v_{\text{Ar}} = m_{\text{Ar}}(v_{\text{Mg}} - v_{\text{Ar}}) + m_{\text{Mg}} v_{\text{Mg}}$, 즉 $2m_{\text{Ar}} v_{\text{Ar}} = (m_{\text{Mg}} + m_{\text{Ar}}) v_{\text{Mg}}$ 이므로

$$\frac{v_{\text{Mg}}}{v_{\text{Ar}}} = \frac{2m_{\text{Ar}}}{m_{\text{Mg}} + m_{\text{Ar}}} = \frac{2 \times 40m_u}{24m_u + 40m_u} = \frac{80}{64} = \frac{5}{4}$$

문항 3 질량 차 $1.0m_u$ 에 대한 도달 시간 차

아르곤 이온의 속도로부터 질량 차가 $1.0m_u$ 인 두 시료 원자가 얻는 속도를 각각 구하고, 그 결과로부터 시간 차를 구한다.

아르곤 이온의 운동에너지를 E_K 라고 하면, 전위차 12500 V 로 가속되었으므로 $E_K = |e| \times 12500 = \frac{1}{2}m_{Ar}v^2$ 이고

$$v = \sqrt{\frac{2E_K}{m_{Ar}}} = \sqrt{\frac{2 \times 12500 \times 1.6 \times 10^{-19}}{40 \times 1.6 \times 10^{-27}}} = \sqrt{625 \times 10^8} = 2.5 \times 10^5 \text{ (m/s)}$$

시료 원자 중 질량이 xm_u 와 $(x+1)m_u$ 인 원자의 충돌 후 속도를 각각 v_1, v_2 라고 하자. 문항 [2]의 결과에서 질량 xm_u 인 원자의 충돌 후 속도는

$$v_1 = \frac{2m_{Ar}}{xm_u + m_{Ar}}v, \quad v_2 = \frac{2m_{Ar}}{(x+1)m_u + m_{Ar}}v$$

이다. 중력과 공기 저항을 무시하므로 충돌 후 시료 원자는 연직 아래로 등속 직선 운동을 하고, 1 m 를 이동하는 데 걸리는 시간은 각각 $1/v_1, 1/v_2$ 이다. 따라서

$$\Delta t = \left| \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right| = \left| \frac{xm_u + m_{Ar}}{2vm_{Ar}} - \frac{(x+1)m_u + m_{Ar}}{2vm_{Ar}} \right| = \frac{m_u}{2vm_{Ar}} = \frac{m_u}{2v \times 40m_u} = \frac{1}{80v}$$

즉 도달 시간 차는 두 원자의 질량 자체와 무관하게 질량 차에만 의존한다.

$$\Delta t = \frac{1}{80 \times 2.5 \times 10^5} = 5.0 \times 10^{-8} \text{ (s)}$$

문항 4 도달 시간으로부터 미지 시료의 원소 식별

도달 시간을 이용해 원소의 종류를 알아내고, 그래프 값의 비로부터 원소 비를 알 수 있다.

아르곤 이온의 속도와 질량을 v, m_{Ar} 라 하고, 각각의 시간 $t_1 = 2.8 \times 10^{-6}, t_2 = 3.4 \times 10^{-6}$ 에 도달한 원소의 질량을 각각 x_1m_u, x_2m_u 라고 하자.

앞의 결과로부터 $v = 2.5 \times 10^5$ (m/s) 이고, 질량 xm_u 인 원자의 도달 시간은

$$t = \frac{1}{v_1} = \frac{xm_u + m_{Ar}}{2vm_{Ar}} = \frac{xm_u + 40m_u}{80vm_u} = \frac{x+40}{80v}$$

와 같이 얻어지므로, 측정된 시간에서 거꾸로 질량수를 구할 수 있다.

$$x_1 = 80t_1v - 40 = 80 \times (2.8 \times 10^{-6}) \times (2.5 \times 10^5) - 40 = 56 - 40 = 16$$

주기율표로부터 $16m_u$ 를 찾아보면, 산소(O)임을 알 수 있다. 마찬가지로 t_2 에 대해서도 $t_2 = (x_2 + 40)/(80v)$ 이므로

$$x_2 = 80t_2v - 40 = 80 \times (3.4 \times 10^{-6}) \times (2.5 \times 10^5) - 40 = 68 - 40 = 28$$

주기율표로부터 $28m_u$ 를 찾아보면 규소(Si)임을 알 수 있다.

같은 관계식 $t = (x+40)/(80v)$ 로 [표1]의 원소마다 도달 시간을 계산해 보면 아래와 같고, 측정된 두 시간 2.8×10^{-6} s 와 3.4×10^{-6} s 에 해당하는 원소는 각각 산소와 규소 하나로만 결정된다. (표의 시간 단위는 10^{-6} s)

원소	H	He	Li	Be	B	C	N	O
t	2.05	2.20	2.35	2.45	2.55	2.60	2.70	2.80
원소	F	Ne	Na	Mg	Al	Si	P	S
t	2.95	3.00	3.15	3.20	3.35	3.40	3.55	3.60

끝으로 그래프의 값으로부터 각 원소의 개수 비를 구하면 다음과 같다.

미지의 시료는 산소(O)와 규소(Si)로 구성되어 있고, 그 개수 비는 Si : O = 1000 : 2000 = 1 : 2 이다.

즉 미지의 시료는 이산화규소(SiO_2) 조성에 해당한다.