

2018학년도 연세대학교 수시모집 논술시험

물리

문항 · 제시문 · 예시 답안

연세대학교

문항 및 제시문

(가)

우리 주변에는 일정한 시간 간격으로 같은 운동 형태를 반복하는 것들이 있다. 예를 들어, 용수철에 매달린 추를 잡아 당겼다 놓으면, 일정한 폭을 왕복한다. 용수철의 탄성력은 추를 원래 위치로 돌아가게 한다. 이와 같이 원래 위치로 돌아가게 하는 힘을 복원력이라고 한다.

(나)

그네를 타는 사람 또는 줄에 매달린 추의 운동과 같이 한 쪽 끝이 고정된 줄에 매달려 왕복 운동하는 물체를 진자라 한다. 진자의 속도와 가속도는 크기와 방향이 계속 변하고, 가속도의 방향은 알짜힘의 방향과 같다. 줄의 길이에 비하여 왕복 운동하는 폭이 매우 작으면 진자의 운동이 거의 수평에 가깝다.

(다)

열은 고온의 물체에서 저온의 물체로 이동한다. 이렇게 이동하는 열은 물체의 상태나 온도를 변화시키고 기체의 압력이나 부피를 변화시킬 수 있다. 모든 기체 분자는 열운동을 하고 있으므로 운동 에너지를 가지며, 기체 분자 사이의 인력에 의한 위치 에너지를 가질 수 있다. 분자 사이의 인력을 무시할 수 있는 이상 기체의 내부 에너지는 기체 분자의 운동 에너지의 총합이다. 기체에 열을 가하면 내부 에너지가 증가하거나 외부에 일을 하게 된다. 이 때 열에너지와 역학적 에너지를 포함하여 에너지가 보존된다.

(라)

가정에서 사용하는 가전제품은 대부분 교류를 사용한다. 교류를 사용하는 기기를 이해하기 위해서는 교류 전원에 연결된 코일, 축전기, 저항 등의 작동 원리를 이해해야 한다. 코일을 교류 전원에 연결하면 자신이 생성한 자기장의 변화를 방해하는 방향으로 유도 기전력이 생기고, 축전기를 교류 전원에 연결하면 전압에 비례하는 전하가 축전기에 저장된다. 코일에 생기는 유도 기전력은 코일의 자체 유도 계수 L 에 비례하고 축전기에 저장되는 전하의 양은 축전기의 전기 용량 C 에 비례한다. 이상적인 코일과 축전기에서는 에너지가 소모되지 않는다.

(마)

입자가 파동의 성질을 나타낼 때, 이 파동을 물질파라고 한다. 독일의 물리학자 보른(Born)은 물질파를 확률과 관련지어 해석하였으며, 슈뢰딩거(Schrödinger)는 물질파를 나타내는 파동 함수가 만족시키는 방정식을 찾아 내었다. 길이가 L 인 1차원 상자 속에 질량이 m 인 입자 1개가 갇혀 있는 경우에 이 입자의 에너지 준위는 $E_n = n^2 h^2 / (8mL^2)$ (n 은 자연수, h 는 플랑크 상수)로 불연속적인 값을 가지며 파동 함수는 상자의 경계에서 마디를 이루는 정상파의 모양을 가진다.

문항

- [1] 길이가 L 인 가벼운 실에 질량이 m 인 추를 매달아 각도 θ_0 만큼 당겼다가 가만히 놓으면, 운동을 하게 된다. 추의 위치의 최고점과 최저점에서 실이 추에 작용하는 힘의 크기를 비교하여 논하시오. 각도 θ_0 가 작은 경우에 추에 작용하는 알짜힘을 고려하여 추의 가속도를 논하고, 주기에 영향을 주는 변인을 논하시오. [10점]
- [2] N 개의 단원자 분자로 이루어진 이상 기체가 일정한 압력 P_0 , 부피 V_0 , 절대 온도 T_0 를 유지하다가, 압력을 일정하게 유지하면서 천천히 팽창하여 부피가 4배로 증가하였고(과정 1), 잠시 후 부피를 일정하게 유지하면서 압력이 5배로 증가하였다(과정 2). 그 후 압력을 일정하게 유지하면서 부피가 $1/4$ 배로 감소하였고(과정 3), 잠시 후 부피를 일정하게 유지하면서 압력이 $1/5$ 배로 감소하였다(과정 4). 이와 같이 이상 기체의 상태가 변하였을 때, 각 과정마다 열과 일의 출입과 내부 에너지의 변화, 온도 변화에 대해 논하시오. [10점]
- [3] 코일만 있는 회로를 교류 전원에 연결하였을 때 회로에 흐르는 전류에 대해 논하고, 축전기만 있는 회로를 교류 전원에 연결하였을 때 회로에 흐르는 전류에 대해 논하시오. 코일과 축전기와 저항이 직렬로 연결된 회로를 교류 전원에 연결하였을 때 회로에 흐르는 전류에 대해 논하시오. 단, 교류 전원의 전압의 최댓값은 V_0 이고 주파수는 f 이다. [10점]
- [4] 길이가 L 인 1차원 상자 속에 질량이 m 인 입자 1개가 갇혀 있을 때 입자가 가장 낮은 에너지 준위에 있는 경우와 높은 에너지 준위에 있는 경우를 비교하여 입자가 발견될 확률을 위치에 따라 논하시오. 이 입자가 흡수하거나 방출할 수 있는 에너지를 가장 작은 값부터 커지는 순서대로 나열할 때 처음 5개 에너지에 대해 논하시오. 단, 입자는 상자 밖으로 나갈 수 없으며, 상자 내부에 있을 때에는 어떤 힘도 받지 않는다. [10점]

예시 답안

[1] 풀이

최고점과 최저점에서 실이 추에 작용하는 힘(장력)의 비교

실의 장력은 항상 실을 따라 추에서 회전 중심을 향한다. 원운동에서 실 방향(구심 방향) 성분의 알짜힘이 구심력 mv^2/L 을 이루므로, 각 위치에서 장력의 크기는 그 위치의 속력에 따라 달라진다.

최고점 $\theta = \theta_0$ 에서는 추가 순간적으로 정지하므로 $v = 0$, 즉 구심력이 0이다. 따라서 실 방향으로 장력과 중력의 실 방향 성분 $mg \cos \theta_0$ 가 균형을 이룬다.

$$T_{\text{최고}} = mg \cos \theta_0$$

최저점에서는 역학적 에너지 보존을 쓴다. 최고점보다 $L(1 - \cos \theta_0)$ 만큼 낮으므로

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL(1 - \cos \theta_0) \implies v^2 = 2gL(1 - \cos \theta_0)$$

최저점에서 실 방향은 연직 위쪽이고 구심 방향도 위쪽이므로

$$T_{\text{최저}} - mg = \frac{mv^2}{L} \implies T_{\text{최저}} = mg + 2mg(1 - \cos \theta_0) = mg(3 - 2 \cos \theta_0)$$

두 값의 차는

$$T_{\text{최저}} - T_{\text{최고}} = mg(3 - 2 \cos \theta_0) - mg \cos \theta_0 = 3mg(1 - \cos \theta_0) > 0 \quad (0 < \theta_0 \leq 90^\circ)$$

이므로 최저점에서 실이 추에 작용하는 힘이 최고점에서보다 항상 크다. 최저점에서는 중력을 이기면서 동시에 구심력까지 공급해야 하지만, 최고점에서는 속력이 0이어서 구심력이 필요 없고 중력의 실 방향 성분만 상쇄하면 되기 때문이다. 두 힘의 차이는 θ_0 가 클수록 커지고, $\theta_0 \rightarrow 0$ 이면 두 값 모두 mg 에 가까워진다.

θ_0 가 작을 때의 가속도와 주기에 영향을 주는 변인

추에 작용하는 힘은 중력 mg 와 장력뿐이고, 이 중 운동 방향(원호의 접선 방향)의 알짜힘은 중력의 접선 성분이다. 변위를 최저점에서 잰 호의 길이 $x = L\theta$ 로 두면

$$F_{\text{접선}} = -mg \sin \theta$$

이고, 제1문 (나)와 같이 θ_0 가 매우 작아 진폭이 실의 길이보다 훨씬 작으면 $\sin \theta \approx \theta = x/L$ 로 근사할 수 있다. 따라서

$$F_{\text{접선}} \approx -mg\theta = -\frac{mg}{L}x, \quad a = \frac{F_{\text{접선}}}{m} = -\frac{g}{L}x$$

즉 가속도의 크기는 변위의 크기에 비례하고 방향은 항상 변위의 반대쪽(최저점을 향하는 복원력 방향)이다. 이는 제1문 (가)의 복원력이 작용하는 단진동의 조건 $a = -\omega^2 x$ 와 같은 꼴이므로 추는 단진동을 하며

$$\omega^2 = \frac{g}{L}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

따라서 주기에 영향을 주는 변인은 실의 길이 L 과 중력 가속도 g 뿐이다. 주기는 $\sqrt{L}$ 에 비례하여 실이 길수록 길어지고, g 가 큰 곳일수록 짧아진다. 반면 추의 질량 m 은 복원력과 관성이 모두 m 에 비례하여 상쇄되므로 주기에 영향을 주지 않고, 진폭 θ_0 역시 (작은 각 근사가 성립하는 범위에서는) 주기에 영향을 주지 않는다. 이것이 진자의 등시성이다. 다만 θ_0 가 커져 근사가 깨지면 실제 주기는 $2\pi\sqrt{L/g}$ 보다 조금씩 길어진다.

[2] 풀이

단원자 분자 이상 기체이므로 내부 에너지는 분자 운동 에너지의 총합이고

$$U = \frac{3}{2}NkT, \quad PV = NkT \implies NkT_0 = P_0V_0$$

이다. 열역학 제1법칙 $Q = \Delta U + W$ (W 는 기체가 외부에 한 일)를 각 과정에 적용한다. 아래에서 모든 에너지는 P_0V_0 을 단위로 나타내었다.

과정	온도 변화	기체가 한 일 W	내부 에너지 ΔU	열 Q
과정 1 (등압 팽창)	$T_0 \rightarrow 4T_0$ 상승	$P_0(4V_0 - V_0)$ $= +3P_0V_0$	$\frac{3}{2}Nk(3T_0)$ $= +\frac{9}{2}P_0V_0$	$+ \frac{15}{2}P_0V_0$ 흡수
과정 2 (등적 가압)	$4T_0 \rightarrow 20T_0$ 상승	0	$\frac{3}{2}Nk(16T_0)$ $= +24P_0V_0$	$+24P_0V_0$ 흡수
과정 3 (등압 압축)	$20T_0 \rightarrow 5T_0$ 하강	$5P_0(V_0 - 4V_0)$ $= -15P_0V_0$	$\frac{3}{2}Nk(-15T_0)$ $= -\frac{45}{2}P_0V_0$	$- \frac{75}{2}P_0V_0$ 방출
과정 4 (등적 감압)	$5T_0 \rightarrow T_0$ 하강	0	$\frac{3}{2}Nk(-4T_0)$ $= -6P_0V_0$	$-6P_0V_0$ 방출

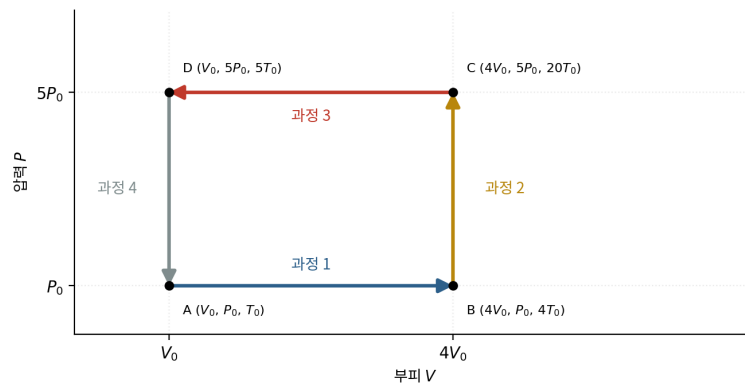
과정 1 — 압력이 P_0 로 일정한 채 부피가 $V_0 \rightarrow 4V_0$ 이므로 $PV = NkT$ 에서 온도는 $T_0 \rightarrow 4T_0$ 로 4배가 된다. 기체가 팽창하며 외부에 $W = P_0\Delta V = 3P_0V_0$ 의 일을 하고, 온도가 올라가므로 내부 에너지도 $\Delta U = \frac{9}{2}P_0V_0$ 만큼 증가한다. 두 몫을 모두 공급해야 하므로 기체는 $Q = \frac{15}{2}P_0V_0$ 의 열을 흡수한다.

과정 2 — 부피가 $4V_0$ 로 일정하므로 기체는 일을 하지도 받지도 않는다($W = 0$). 압력이 5배가 되어 온도는 $4T_0 \rightarrow 20T_0$ 로 상승하고, 흡수한 열은 전부 내부 에너지 증가로 쓰인다($Q = \Delta U = +24P_0V_0$).

과정 3 — 압력이 $5P_0$ 로 일정한 채 부피가 $4V_0 \rightarrow V_0$ 로 줄어드므로 온도는 $20T_0 \rightarrow 5T_0$ 로 하강한다. 기체가 압축되므로 기체가 한 일은 음수($W = -15P_0V_0$), 즉 외부로부터 $15P_0V_0$ 의 일을 받는다. 동시에 내부 에너지가 $\frac{45}{2}P_0V_0$ 만큼 감소하므로, 받은 일과 줄어든 내부 에너지를 합한 $\frac{75}{2}P_0V_0$ 의 열을 외부로 방출한다. 네 과정 중 열의 출입이 가장 큰 과정이다.

과정 4 — 부피가 V_0 로 일정하므로 $W = 0$ 이고, 압력이 $\frac{1}{5}$ 배가 되어 온도는 $5T_0 \rightarrow T_0$ 로 하강한다. 감소한 내부 에너지 $6P_0V_0$ 이 그대로 열로 방출된다($Q = -6P_0V_0$).

순환 전체 — 네 과정을 거쳐 기체는 처음 상태 (P_0, V_0, T_0)로 되돌아온다. 내부 에너지는 상태 함수이므로 한 순환 동안의 총 변화는 $\Delta U_{\text{전체}} = \frac{9}{2} + 24 - \frac{45}{2} - 6 = 0$ 으로 0이다. 반면 총 일은 $W_{\text{전체}} = 3 - 15 = -12P_0V_0$, 총 열은 $Q_{\text{전체}} = \frac{15}{2} + 24 - \frac{75}{2} - 6 = -12P_0V_0$ 로 서로 같다. 즉 이 순환은 P - V 도표에서 반시계 방향으로 돌며, 외부에서 $12P_0V_0$ 의 일을 받아 같은 크기의 열을 외부로 버리는 과정이다(냉동기와 같은 방향의 순환).



예시 작도 — 네 과정의 P - V 도표(반시계 방향 순환).

[3] 풀이

교류 전원의 전압을 $v = V_0 \sin(2\pi ft)$ 로 둔다.

(가) 코일만 있는 회로

코일에는 제시문 (라)와 같이 전류의 변화를 방해하는 방향으로 유도 기전력 $-L \frac{di}{dt}$ 가 생긴다. 저항이 없으므로 이 유도 기전력의 크기가 매번 전원 전압과 같아야 한다.

$$L \frac{di}{dt} = V_0 \sin(2\pi ft) \implies i = -\frac{V_0}{2\pi fL} \cos(2\pi ft) = \frac{V_0}{2\pi fL} \sin\left(2\pi ft - \frac{\pi}{2}\right)$$

즉 전류의 최대값은

$$I_0 = \frac{V_0}{X_L}, \quad X_L = 2\pi fL \quad (\text{유도 리액턴스})$$

이고, 전류의 위상은 전압보다 $\pi/2$ (주기의 $1/4$)만큼 뒤진다. 자체 유도 계수 L 이 크거나 주파수 f 가 높을수록 전류의 변화를 방해하는 유도 기전력이 커지므로 전류는 작아진다. 반대로 $f \rightarrow 0$ (직류)이면 코일은 도선처럼 행동한다. 전압과 전류의 위상차가 $\pi/2$ 이므로 한 주기 동안 코일이 소비하는 평균 전력은 0이고, 에너지는 자기장 형태로 저장되었다 되돌려질 뿐이다.

(나) 축전기만 있는 회로

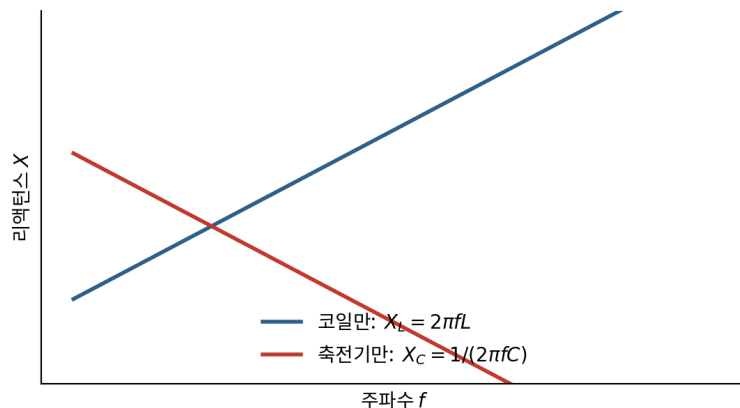
축전기에 저장되는 전하는 전압에 비례하므로 $q = Cv = CV_0 \sin(2\pi ft)$ 이고, 전류는 전하의 시간 변화율이므로

$$i = \frac{dq}{dt} = 2\pi fCV_0 \cos(2\pi ft) = 2\pi fCV_0 \sin\left(2\pi ft + \frac{\pi}{2}\right)$$

즉

$$I_0 = \frac{V_0}{X_C}, \quad X_C = \frac{1}{2\pi fC} \quad (\text{용량 리액턴스})$$

이고, 전류의 위상은 전압보다 $\pi/2$ 만큼 앞선다. 코일과 반대로 전기 용량 C 가 크거나 주파수 f 가 높을수록 같은 시간에 드나드는 전하량이 많아져 전류가 커진다. $f \rightarrow 0$ (직류)이면 전류는 0이 되어 축전기는 회로를 끊는 역할을 한다. 이 경우에도 위상차가 $\pi/2$ 이므로 평균 소비 전력은 0이며, 에너지는 전기장 형태로 저장되었다 되돌려진다.



예시 작도 — 주파수에 따른 두 리액턴스의 변화(양 축 로그 눈금).

(다) 코일·축전기·저항이 직렬로 연결된 회로

직렬 연결이므로 세 소자에는 같은 전류가 흐르지만, 각 소자에 걸리는 전압의 위상은 서로 다르다. 저항의 전압은 전류와 같은 위상, 코일의 전압은 전류보다 $\pi/2$ 앞서고, 축전기의 전압은 전류보다 $\pi/2$ 뒤진다. 코일과 축전기의 전압은 위상이 정반대이므로 서로 상쇄되어 그 크기의 차 $|X_L - X_C| I_0$ 만 남고, 이것이 저항의 전압 $R I_0$ 와 수직으로 합해진다. 따라서 전체 임피던스와 전류의 최댓값은

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2}, \quad I_0 = \frac{V_0}{Z}$$

이고, 전압에 대한 전류의 위상차 φ 는

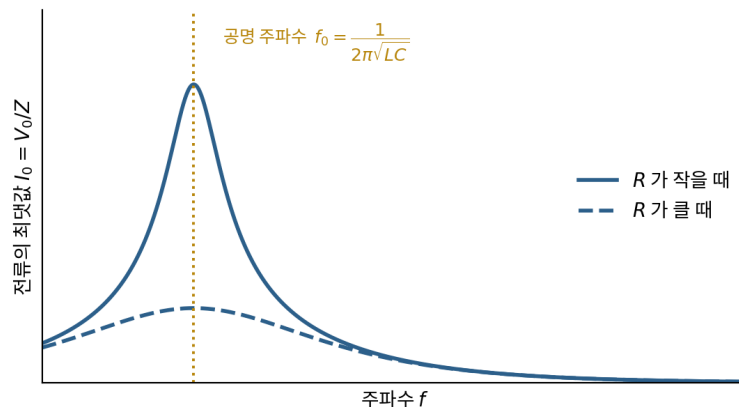
$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

로 주어진다. $X_L > X_C$ (높은 주파수)이면 회로가 코일처럼 작동하여 전류가 전압보다 뒤지고, $X_L < X_C$ (낮은 주파수)이면 축전기처럼 작동하여 전류가 전압보다 앞선다.

특히 $X_L = X_C$ 가 되는 주파수

$$2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

에서는 $Z = R$ 로 최소가 되어 전류의 최댓값이 $I_0 = V_0/R$ 로 가장 커지고 위상차도 0이 된다. 이것이 공명(공진) 현상이며, 저항 R 이 작을수록 공명 봉우리가 좁고 높아진다. 이상적인 코일과 축전기는 에너지를 소비하지 않으므로 회로에서 전력을 소비하는 것은 저항뿐이며, 평균 소비 전력은 $\bar{P} = \frac{1}{2} I_0^2 R$ 이다.



예시 작도 — RLC 직렬 회로에서 주파수에 따른 전류의 최댓값과 공명.

[4] 풀이

위치에 따라 입자가 발견될 확률

제시문 (마)에서 파동 함수는 상자의 경계 $x = 0, L$ 에서 마디를 이루는 정상파의 모양을 가지므로, n 번째 준위의 파동 함수는 상자 길이 L 안에 반파장이 n 개 들어가는 모양이다.

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

보른의 해석에 따라 입자가 위치 x 부근에서 발견될 확률은 파동 함수의 제곱 $|\psi_n(x)|^2$ 에 비례한다.

가장 낮은 에너지 준위($n = 1$)에서는 상자 안에 반파장 하나만 들어가므로 파동 함수의 마디가 양 끝 벽에만 있다. 따라서 확률은 상자의 한가운데 $x = L/2$ 에서 최대이고 벽으로 갈수록 작아져 벽에서 0이 된다. 즉 입자는 상자 중앙 부근에서 발견될 확률이 가장 크다.

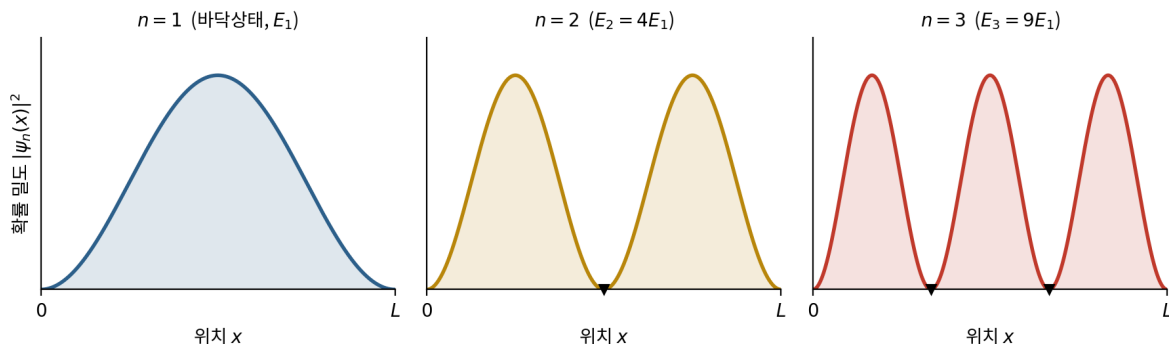
높은 에너지 준위($n \geq 2$)에서는 상자 안쪽에 마디가 $n - 1$ 개 생긴다. 마디의 위치

$$x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \dots, \frac{(n-1)L}{n}$$

에서는 확률이 정확히 0이 되어 입자가 결코 발견되지 않고, 두 마디 사이의 중앙

$$x = \frac{L}{2n}, \frac{3L}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)L}{2n}$$

에서 확률이 최대가 된다. 즉 확률이 최대인 지점이 n 개로 늘어나고, 그 봉우리들은 상자 안에 고르게 분포한다. 봉우리 하나의 높이는 준위에 관계없이 같지만 폭이 L/n 으로 좁아진다. 이처럼 낮은 준위에서는 확률 분포가 중앙에 집중된 하나의 봉우리인 반면, 준위가 높아질수록 봉우리와 마디가 촘촘히 번갈아 나타나고, n 이 매우 커지면 확률 분포가 상자 전체에 걸쳐 거의 균일해져 상자 안을 등속으로 왕복하는 고전적인 입자의 결과에 가까워진다.



예시 작도 — 준위에 따른 확률 밀도 $|\psi_n(x)|^2$. 아래쪽 삼각형 표시가 확률이 0이 되는 마디의 위치이다.

흡수하거나 방출할 수 있는 에너지 — 작은 값부터 5개

입자는 허용된 준위 사이를 옮겨갈 때만 에너지를 주고받으므로, 흡수하거나 방출할 수 있는 에너지는 두 준위의 에너지 차이이다. $E_1 = h^2/(8mL^2)$ 로 두면 $E_n = n^2 E_1$ 이므로

$$\Delta E = E_n - E_k = (n^2 - k^2)E_1 = (n - k)(n + k)E_1 \quad (n > k \geq 1)$$

이다. 여기서 $n - k$ 와 $n + k$ 는 합이 $2n$ 으로 짝수이므로 홀짝이 같다. 따라서 $(n - k)(n + k)$ 는 홀수이거나 4의 배수만 될 수 있어 2, 4, 6 같은 값은 나타날 수 없다. 실제로 작은 값부터 나열하면

$$3E_1(2 \rightarrow 1), \quad 5E_1(3 \rightarrow 2), \quad 7E_1(4 \rightarrow 3), \quad 8E_1(3 \rightarrow 1), \quad 9E_1(5 \rightarrow 4)$$

이므로 처음 5개 에너지는

$$3\frac{h^2}{8mL^2}, \quad 5\frac{h^2}{8mL^2}, \quad 7\frac{h^2}{8mL^2}, \quad \frac{h^2}{mL^2}, \quad 9\frac{h^2}{8mL^2}$$

이다. 가장 작은 값 $3E_1$ 은 바닥상태와 첫 번째 들뜬상태 사이의 간격이고, 이웃한 두 준위 사이의 간격 $(2k + 1)E_1$ 은 준위가 높아질수록 커진다. 위의 다섯 값 가운데 $8E_1$ 만이 이웃하지 않은 준위($n = 3$ 과 $n = 1$) 사이의 전이이다. 상자의 길이 L 이 짧을수록, 입자의 질량 m 이 작을수록 E_1 이 커져 주고받는 에너지도 모두 커진다.