05 역학적 에너지 보존과 탈출 속도

학습 목표 역학적 에너지 보존으로 행성에 따라 탈출 속도가 다르다는 것을 이해하고, 운동량 보존으로 우주선이 발사되어 궤도에 오르는 원리를 설명할 수 있다.

로켓이 화성의 중력을 벗어나는 데 필요한 최소한의 속력이 있다. 하지만 같은 로켓을 같은 속력으로 지구에서 쏘면 다시 지구로 돌아온다. 그 까닭은 무엇일까?

역학적 에너지 보존 법칙

그림 I-20에서 지구 질량을 M, 지구 반지름을 R라고 할 때, 높이 h가 R에 비해 무시할 수 있을 만큼 작다면 질량 m인 물체 A에 작용하는 중력의 크기 F_A를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_A = G\frac{mM}{(R+h)^2} \approx m \cdot G\frac{M}{R^2} = mg$$

이때 A의 역학적 에너지를 $E=\frac{1}{2}mv^2+mgh$와 같이 표현할 수 있으며, 이는 지구 중력 외의 외력을 받지 않는 한 보존된다. 한편 $r \sim (r+h)$ 구간에서 질량 m인 물체 B에 작용하는 중력의 크기 F_B도 다음과 같이 유사하게 나타낼 수 있다.

$$F_B = G\frac{mM}{(r+h)^2} \approx m \cdot G\frac{M}{r^2} = mg'$$

여기서 $r > R$이므로 $g' < g$이지만 $r \sim (r+h)$ 구간에서 B의 역학적 에너지는 보존된다. 물체가 지구 중심에서 먼 곳에 있더라도 지표에서 물체까지의 거리를 매우 작은 높이의 여러 구간으로 나누어 생각하면 각 구간에서 역학적 에너지가 보존된다는 것을 유추할 수 있다.

따라서 물체가 지구로부터 임의의 위치에 있을 때 지구 중력 외의 외력을 받지 않는 한 물체의 역학적 에너지는 보존된다. 이것을 **중력에 의한 역학적 에너지 보존 법칙**이라고 한다.

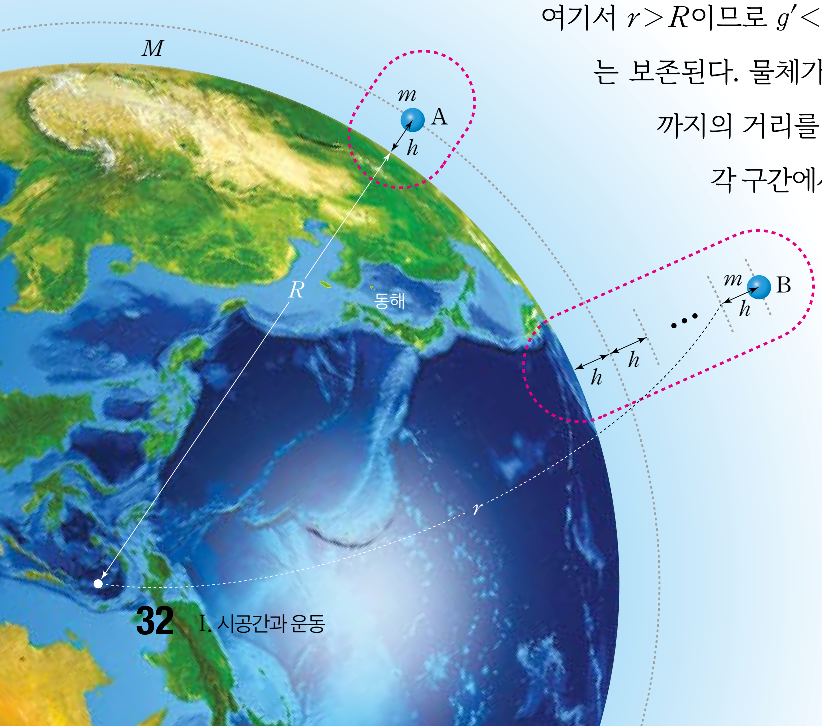


그림 I-20 **중력과 역학적 에너지**

> 역학적 에너지
> =운동 에너지+중력에 의한 위치 에너지=일정

지표로부터 물체까지의 거리가 지구 반지름과 비교해 충분히 멀다면, 그 물체의 운동을 다룰 때에는 지구 중심으로부터 무한히 멀리 떨어진 곳을 기준점으로 하여 그 위치에서 중력에 의한 위치 에너지를 0으로 정의한다. 이 경우 지구 중심으로부터 떨어진 거리 r에 따른 중력에 의한 위치 에너지 U_g는 다음과 같다.

$$U_g = -G\frac{mM}{r}$$

따라서 중력에 의한 역학적 에너지 보존 법칙은 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \text{일정}$$

탈출 속도

그림 I-21과 같이 질량 M인 지구 주위 반지름 r인 궤도를 따라 속력 v_0으로 등속 원운동을 하는 질량 m인 인공위성의 역학적 에너지는 다음과 같다.

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{r} \quad \cdots ①$$

인공위성에 중력이 구심력으로 작용하므로 다음 관계가 성립한다.

$$\frac{mv_0^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \Rightarrow mv_0^2 = G\frac{mM}{r} \quad \cdots ②$$

②를 ①에 적용하면 역학적 에너지는 다음과 같다.

$$E = -G\frac{mM}{2r} < 0$$

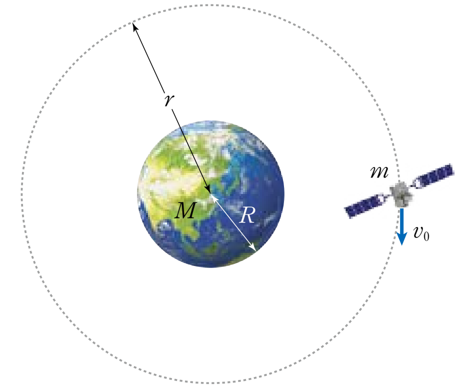


그림 I-21 **인공위성의 운동**

따라서 지구 주위를 등속 원운동 하는 인공위성의 역학적 에너지는 0보다 작다.

만약 역학적 에너지가 $E \geq 0$이라면 인공위성은 어떤 운동을 할까? ①을 통해 다음과 같은 관계를 유도할 수 있다.

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{r} \geq 0 \Rightarrow v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad \cdots ③$$

③을 이용하면 인공위성이 등속 원운동을 하는 데 필요한 구심력의 크기가 중력보다 크다는 것을 알 수 있다.

$$\frac{mv_0^2}{r} \geq 2G\frac{mM}{r^2} > G\frac{mM}{r^2}$$

즉, $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$이면 중력의 크기가 등속 원운동에 필요한 구심력보다 작다. 따라서 인공위성이 특정 궤도에서 등속 원운동을 할 수 없고, 지구로부터 점점 멀어진다.

그리고 인공위성이 지구로부터 무한히 먼 곳에 가면 중력에 의한 위치 에너지는 0이 되지만 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mv^2 \geq 0$이다. 즉, 지구로부터 무한히 먼 곳에서 인공위성은 정지하거나 계속 멀어져 결국 지구 중력장*으로부터 탈출한다.

따라서 질량 M, 반지름 R인 행성 표면에서 속력 $v_{탈출}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$으로 운동하는 물체는 행성의 중력으로부터 간신히 벗어날 수 있다. 이 속력을 행성의 **탈출 속도**라고 한다. 행성의 탈출 속도는 물체의 질량에 관계없이 행성의 질량과 반지름에 따라 다르다.

행성마다 표면 온도와 탈출 속도가 다르기 때문에 대기의 구성 또한 다르다. 행성의 표면 온도가 높고 기체 분자의 질량이 작을수록 대기 중 기체 분자의 속도가 크다. 만약 기체 분자의 속도가 행성의 탈출 속도를 넘어서면 행성으로부터 탈출해 대기 중에 거의 남아 있지 않게 된다. 따라서 그림 Ⅰ-22에서처럼 표면 온도가 높고 탈출 속도가 작은 지구형 행성의 대기에는 수소나 헬륨과 같이 분자의 질량이 작은 기체가 거의 없고, 이산화 탄소나 산소 같이 분자의 질량이 큰 기체의 비율이 높다. 반면 표면 온도가 낮고 탈출 속도가 큰 목성형 행성의 대기에는 수소의 비율이 높고, 헬륨, 메테인, 암모니아 등도 있다.

* **중력장**
질량을 가진 물체 주변에 형성되는 물리량이다. 한 물체 A의 중력장 안에 질량이 있는 다른 물체 B를 놓으면 B는 A로부터 인력을 받는다.

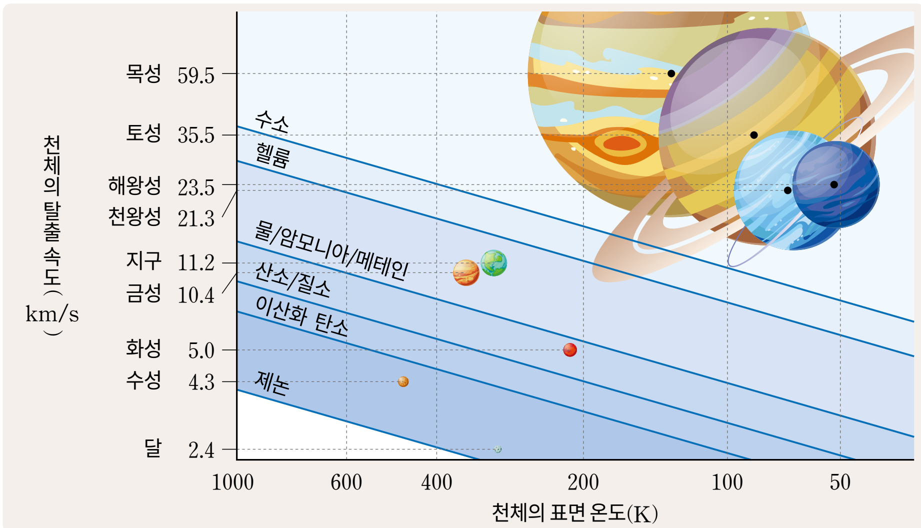


그림 Ⅰ-22 **탈출 속도와 표면 온도에 따른 대기 구성 성분** (출처: 미국항공우주국, 2016.)

스스로 확인

1 역학적 에너지 보존 법칙은 물체가 지표면 근처에 있을 때에만 성립한다. (○, ×)

2 행성의 질량이 (클, 작을)수록, 행성의 반지름이 (클, 작을)수록 행성의 탈출 속도가 크다.

운동량 보존 법칙과 발사체의 운동

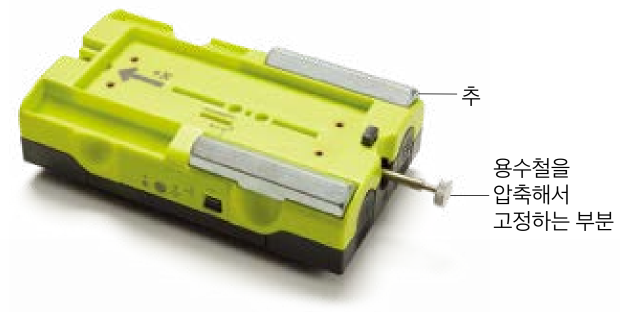
2023년 누리호는 인공위성을 싣고 올라가 목표 궤도에 안착시켰다. 누리호와 같은 발사체는 질량이 커서 목표 궤도에 안착하기 위해 필요한 속도로 한번에 쏘아 올리는 것은 어렵고, 운동량 보존을 이용해 목표 궤도까지 올라간다. 다음 활동을 하면서 발사체에서 운동량 보존을 어떻게 이용하는지 알아보자.

실험 영상

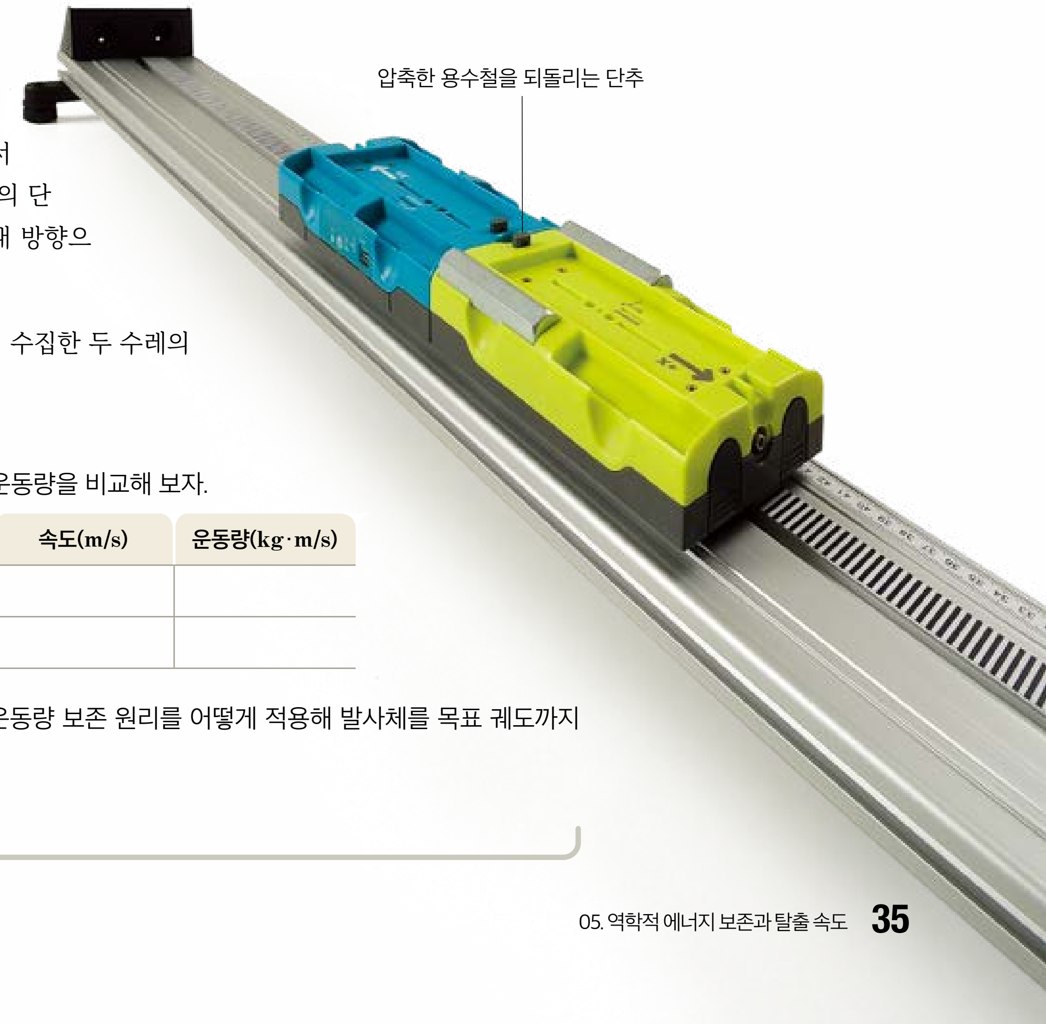
디지털 해보기 | 탐구 능력 | 문제 해결 능력

발사체에 적용된 운동량 보존 원리 알아보기

준비물
☑ 엠비엘(MBL) 무선 수레 2 대 ☑ 수레용 추 ☑ 레일 ☑ 전자저울 ☑ 데이터 분석 애플리케이션
☑ 계산기 애플리케이션 ☑ 스마트 기기



1. 한 수레에만 추를 2 개 올리고, 전자저울로 추를 올린 수레와 빈 수레의 질량을 측정한다.
2. 용수철을 압축 고정한 뒤 두 수레가 서로 맞닿게 레일 가운데에 놓는다.
3. 데이터 분석 애플리케이션을 이용해 두 수레를 스마트 기기와 무선으로 연결한다.



4. 데이터 분석 애플리케이션에서 데이터 수집을 시작하고, 수레의 단추를 눌러 두 수레가 서로 반대 방향으로 튀어 나가게 한다.
5. 데이터 분석 애플리케이션에서 수집한 두 수레의 속도를 확인한다.

● 두 수레가 분리된 뒤 각 수레의 운동량을 비교해 보자.

수레	질량(kg)	속도(m/s)	운동량(kg·m/s)
추를 올린 수레			
빈 수레			

● 위 실험 결과를 통해 발사체에 운동량 보존 원리를 어떻게 적용해 발사체를 목표 궤도까지 올릴 수 있을지 설명해 보자.

발사체는 배기가스를 분출해 추진력을 얻어 날아간다. 이것은 그림 I-23과 같이 질량 M인 수레 B의 용수철이 압축 상태에서 펴지면서 질량 m인 수레 A를 밀면, B와 A가 각각 속도 $\vec{V}$, $\vec{v}$로 반대 방향으로 운동하는 것과 같은 원리이다.

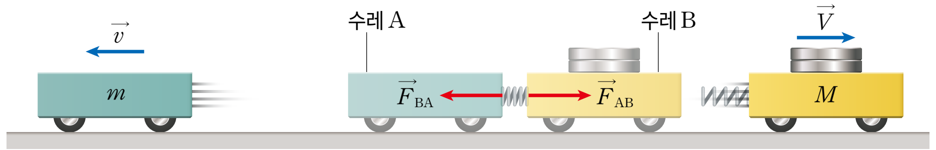


그림 I-23 **용수철을 사이에 둔 두 수레의 운동**

연계 물리학
뉴턴 제3법칙과 운동량 보존 법칙을 '힘과 에너지' 단원에서 배웠다.

용수철이 펴지면서 A는 B에 힘 $\vec{F}_{AB}$를 작용하고, 뉴턴 제3법칙에 따라 B는 A에 $\vec{F}_{AB}$와 크기는 같고 방향이 반대인 힘 $\vec{F}_{BA}$를 작용한다. 따라서 A, B는 서로 반대 방향으로 운동한다.

처음에 A와 B가 모두 정지해 있었다면 외력이 작용하지 않는 한 운동량 보존 법칙에 따라 A와 B의 운동량의 합은 항상 0이므로 다음 관계가 성립한다.

$$m\vec{v}+M\vec{V}=0 \Rightarrow \vec{V}=-\frac{m}{M}\vec{v}$$

즉, A와 B가 분리된 뒤 B의 속도는 A의 질량과 속도가 클수록 빠르다. 발사체가 궤도에 오르기 위해 추진력을 얻는 원리에도 이러한 관계를 적용할 수 있다.

그림 I-24의 (가)와 같이 질량 M, 속력 V로 운동하는 발사체가 그림 (나)와 같이 질량 Δm인 배기가스를 발사체에 대해 u의 속력으로 분사해 발사체의 속력이 Δv만큼 증가한다고 가정해 보자.

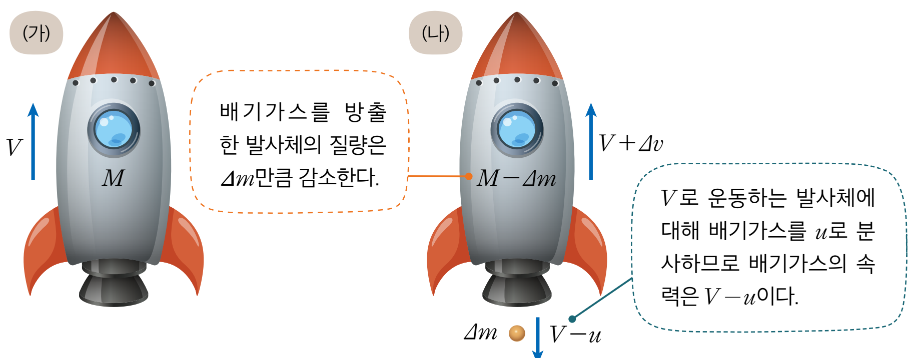


그림 I-24 **발사체에서의 운동량 보존**

(가), (나)에 운동량 보존 법칙을 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$MV=(M-\Delta m)(V+\Delta v)+\Delta m(V-u) \Rightarrow M\Delta v=\Delta m\Delta v+u\Delta m$$

이때 $\Delta m\Delta v$는 매우 작아 무시할 수 있으므로 다음 관계가 성립한다.

$$M\Delta v=u\Delta m$$

즉, 발사체에서 분사하는 배기가스의 질량이 크고 그 속력이 빠를수록 발사체의 운동량이 더 크게 증가한다.

보통 발사체는 연료량에 따라 지상에서 올라갈 수 있는 궤도가 달라진다. 누리호의 경우 총질량 200 톤 중 90 %인 180 톤 정도가 연료이다. 그림 I-25와 같이 1단 엔진에서 연소한 배기가스로부터 얻은 추진력으로 고도 약 60 km에 도달한다. 이때 연료를 다 쓴 1단 엔진을 분리하고, 2단 엔진을 점화한다. 그 뒤로 보호 덮개를 분리하고, 2단, 3단 엔진의 연소가 끝나면서 고도 약 700 km에 도달한 뒤 위성 분리까지 완료한다.

그림 I-25 **누리호가 궤도에 오르는 과정**

잠깐 활동
연료를 다 쓴 엔진이나 보호 덮개를 분리하는 과정에서 얻을 수 있는 효과를 운동량 보존이나 뉴턴 운동 법칙을 적용하여 설명해 보자.

스스로 확인

1 방출한 배기가스의 (　　　　)만큼 발사체의 (　　　　)이/가 증가하는 것을 이용해 발사체를 목표 궤도까지 보낸다.

2 발사체에서 운동 방향과 반대 방향으로 분사하는 배기가스의 질량이 크고 분사 속력이 클수록 발사체의 속력이 더 크게 증가한다. (○, ×)

스스로 정리
공유 화성을 왕복하는 발사체를 개발한다면 어떤 점을 고려해야 할지 자신의 생각을 써서 공유 플랫폼에 공유해 보자.